شریف جزوه

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مقدمه‌ای بر جبر خطی

سید رضا مقدسی

دانشگاه صنعتی شریف

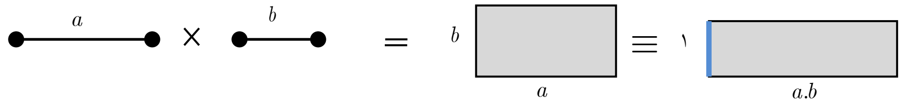
۱. اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مقدمه

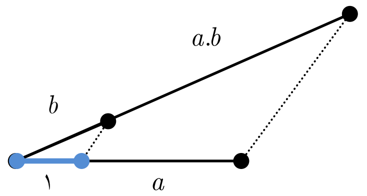
مفهوم عدد یکی از مهم‌ترین مفاهیمی است که بشر با آن مواجه بوده و در طول تاریخ تحول بسیار یافته است. شاید بتوان گفت که او ابتدا توانست مفهوم یکی و مفهوم چندتایی را تمییز دهد و سپس برای شمارش اشیاء اعداد طبیعی را انتزاع کند. همچنین به تدریج توانایی معرفی عمل‌های جمع و ضرب را که با نیازهای او ارتباط مستقیم داشت پیدا کرد. به‌دنبال این پیشرفت نیاز او به معرفی عددهای صفر، منفی و گویا آشکار شد و عمل‌های جمع و ضرب و تفریق و تقسیم روی این عددها گسترش یافت.
اما آشنایی انسان با اعداد غیر گویا با دید هندسی آغاز شد. اگر یک پاره‌خط را به عنوان مقیاس در نظر بگیریم و به آن عدد ۱ (یک) را نسبت دهیم، با تقسیم آن به قسمت‌های مساوی و کنار هم قرار دادن آنها می‌توانیم پاره‌خط‌های متناظر با هر عدد گویای مثبت را بدست آوریم.

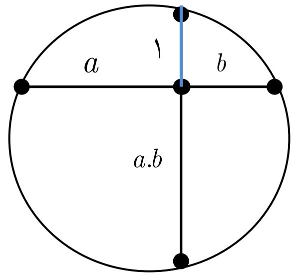
اعمال جمع و ضرب را نیز می‌توان به راحتی به کمک پاره‌خط‌ها نمایش داد.
جمع پاره‌خط‌ها. جمع دو پاره‌خط از کنار هم قرار دادن دو پاره‌خط بدست می‌آید به‌گونه‌ای که دو پاره‌خط تنها در نقاط انتهایی خود مشترک باشند.

ضرب پاره‌خط‌ها. ضرب دو پاره‌خط مساحت مستطیلی است که اضلاع آن پاره‌خط‌های مورد نظرند. ولی با این تعریف حاصل ضرب دو پاره‌خط، دیگر پاره‌خط نخواهد بود! این مشکل به این صورت قابل حل است که ضرب دو پاره‌خط را پاره‌خطی تعریف کنیم که مساحت مستطیل ایجاد شده با آن و پاره‌خط واحد (پاره‌خط مقیاس)، برابر مساحت مستطیل ایجاد شده با دو پاره‌خط مفروض باشد.



شاید شما روشهای بهتری برای تعریف ضرب پاره‌خط در ذهن داشته باشید. مثلاً با ایجاد شکل‌های زیر ضرب دو پاره‌خط را می‌توان تعریف کرد که البته نتایج همه یکی خواهد بود. با این حال از لحاظ تاریخی این ابزار (تشابه و قضیه تالس) بعد از تعریف ضرب دو پاره‌خط به کمک مساحت بدست آمدند.





سادگی جمع نسبت به ضرب

با کمی دقت در تعریف ضرب در می‌یابیم که برای ضرب دو پاره‌خط به پاره‌خط واحد نیاز داریم و با تغییر پاره‌خط واحد حاصل ضرب دو پاره‌خط داده شده تغییر خواهد کرد. این در حالی است که برای جمع دو پاره‌خط نیازی به انتخاب مقیاس نداریم. یعنی جمع کردن دارای ماهیتی ساده‌تر از ضرب کردن است.

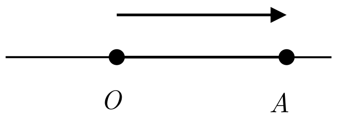
اعداد غیر گویا

ابتدا تصور می‌شد همه پاره‌خطها متناظر اعداد گویا اند. اما قضیه فیثاغورث نشان داد پاره‌خطی وجود دارد که متناظر با هیچ عدد گویایی نیست (وتر مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه واحد). این آغاز آشنایی بشر با اعداد غیر گویا بود. اعدادی که به راحتی برای بشر قابل پذیرش نبودند و مشکلات زیادی ایجاد کردند. مثلاً چگونه می‌توان اعمال جمع و ضرب را که روی اعداد گویا تعریف شده بود برای این اعداد نیز گسترش داد. راه حل این مشکل در دید هندسی به اعداد یافت شد. در دید هندسی، عمل‌های جمع و ضرب روی همه پاره‌خطها قابل انجام است. در واقع این تنها روش گذشتگان برای معرفی اعمال جمع و ضرب روی همه اعداد حقیقی (اعداد گویا و غیر گویا) بود. بنابراین تلاش‌های بسیاری برای بدست آوردن و بیان ویژگی‌های جمع و ضرب انجام شد. مسلماً خواننده با اعداد حقیقی و اعمال جبری روی آنها آشنا است. هدف ما نیز در اینجا بیان چگونگی تعریف اعمال جبری روی همه اعداد حقیقی نیست. در واقع ما خلاف جهت تاریخی حرکت می‌کنیم و به کمک اعداد حقیقی و اعمال جبری روی آنها که برای ما آشنا هستند اعمال جبری روی نقاط یک خط را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم مشابه این اعمال را برای نقاط یک صفحه و یا نقاط فضای سه بعدی معرفی کنیم.

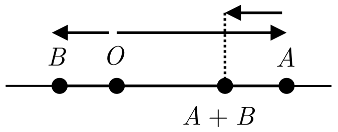
اعمال جبری روی نقاط یک خط

به کمک مطالب قسمت قبل به راحتی می‌توانیم نقاط یک خط را با هم جمع و ضرب کنیم. روش زیر برای این کار در واقع نمایشی هندسی است برای اعمال جمع و ضرب روی اعداد حقیقی که شامل اعداد منفی نیز هستند.

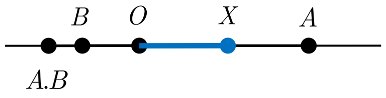
۱. نقطه‌ای از خط را به عنوان مبدأ انتخاب می‌کنیم (و آن را همیشه با O نمایش می‌دهیم). این نقطه برای انجام همه اعمال جبری روی نقاط یک خط ضروری است. بعد از انتخاب این نقطه هر نقطه از خط با پاره‌خطی جهت‌دار متناظر می‌شود که ابتدای آن O و انتهایش آن نقطه است.



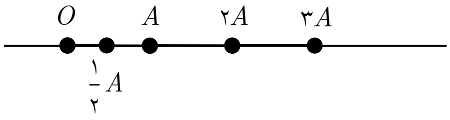
۲. جمع دو نقطه A و B. جمع دو نقطه A و B در واقع جمع پاره‌خطهای جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است به این صورت که یکی از پاره‌خطها را انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای پاره‌خط دیگر قرار گیرد. نقطه حاصل (انتهای پاره‌خط جابجا شده) جمع دو نقطه A و B خواهد بود.



۳. ضرب دو نقطه A و B. برای ضرب ابتدا باید مقیاس را مشخص کرد. یک نقطه از خط غیر از O را مانند X به عنوان ۱ انتخاب می‌کنیم. حال به کمک این مقیاس (یعنی پاره‌خط OX) پاره‌خطهای OA و OB را در هم ضرب می‌کنیم. اگر A و B در یک طرف O قرار داشتند پاره‌خط حاصل را در همان طرف که X قرار دارد جدا می‌کنیم، در غیر این صورت آن را در طرف دیگر جدا می‌کنیم. دقت کنید که برای تعریف ضرب دو نقطه انتخاب نقطه ۱ نیز ضروری است و با تغییر آن حاصل ضرب دو نقطه نیز تغییر خواهد کرد در حالی که جمع دو نقطه چنین نبود.



۴. ضرب یک نقطه در یک عدد! با اینکه برای ضرب دو نقطه به مقیاس نیاز داریم اگر نقطه A را با خودش n بار جمع کنیم نقطه nA بدست می‌آید که مستقل از انتخاب مقیاس است. به صورت مشابه می‌توانیم نقطه $\frac{۱}{m}A$ و $\frac{m}{n}A$ را بدون داشتن مقیاس بدست آوریم. توجه داشته باشید که در این روند ما یک عدد گویا را در نقطه A ضرب می‌کنیم. این عدد نقطه‌ای از خط نیست که برای ضرب کردن آن در نقطه A نیاز به مقیاس داشته باشیم. به این ترتیب می‌توانیم اعداد گویا و حتی اعداد حقیقی را در یک نقطه ضرب کنیم بدون اینکه مقیاسی نیاز داشته باشیم. این نوع ضرب را که با ضرب دو نقطه ماهیتی متفاوت دارد ضرب اسکالر می‌نامیم.



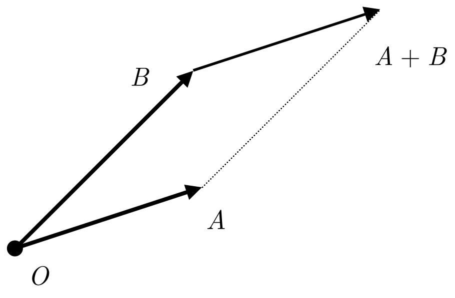
با توجه به مطالب بالا چنین به نظر می‌رسد که ساختار جبری جمع و ضرب اسکالر به مراتب ساده‌تر از ساختار جبری ضرب نقاط در هم است. در ادامه ساختارهای جمع و ضرب اسکالر را که ماهیتی ساده‌تر دارند به مجموعه‌های بزرگتری مانند صفحه و فضا گسترش می‌دهیم.

معرفی ساختارهای جبری مشابه برای صفحه و فضا

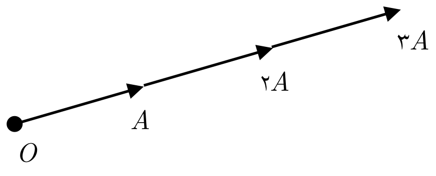
از بین ساختارهای جبری معرفی شده روی نقاط یک خط، جمع و ضرب اسکالر را می‌توان به راحتی به فضاهای بزرگتر گسترش داد.

۱. نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم (و آن را با O نمایش می‌دهیم). به این ترتیب هرنقطه با یک پاره‌خط جهت‌دار متناظر می‌شود که ابتدای آن O و انتهایش آن نقطه است.

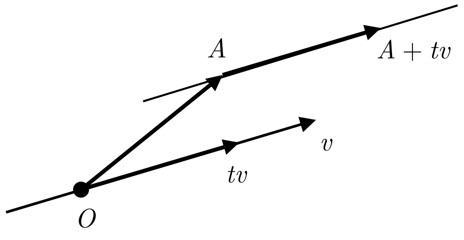
۲. جمع دو نقطه A و B. جمع دو نقطه A و B در واقع جمع پاره‌خط‌های جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است به این صورت که یکی از پاره‌خط‌ها را انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای پاره‌خط دیگر قرار گیرد. نقطه حاصل (انتهای پاره‌خط جابجا شده) جمع دو نقطه A و B خواهد بود. این همان قاعده متوازی الاضلاع برای جمع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. بنابراین $A+B$ رأس چهارم متوازی الاضلاعی است که سه رأس دیگرش O، A و B است.

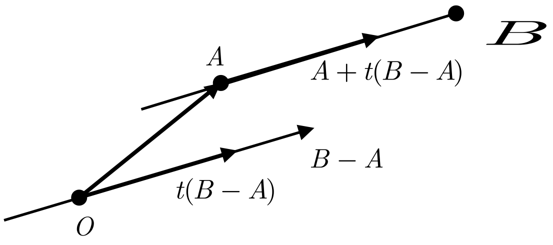


۳. ضرب اسکالر. اگر نقطه A را n بار با خودش جمع کنیم نقطه nA بدست می‌آید. نقطه‌ای هم که با m بار جمع شدن برابر A می‌شود $\frac{۱}{m}A$ است. به این ترتیب ضرب یک عدد در نقطه A را می‌توان معرفی کرد.



اکنون می‌توانیم به کمک این جمع و ضرب نمایشی ساده برای بعضی اشکال هندسی ارائه کنیم. برای مثال $A+tv$ زمانی که t روی اعداد حقیقی تغییر کند خط گذرنده از A و موازی Ov را بدست می‌دهد. بنابراین خط گذرنده از دو نقطه A و B را می‌توان با رابطه $A+t(B-A)=(۱-t)A+tB$ نمایش داد. اگر $P=A+t(B-A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB باشد آنگاه $\overrightarrow{AP}=P-A=t(B-A)=t\overrightarrow{AB}$. به طور مشابه $\overrightarrow{PB}=(۱-t)\overrightarrow{AB}$. به این ترتیب نقاط پاره‌خط $\overline{AB}$ دقیقاً نقاطی به صورت $(۱-t)A+tB$ خواهند بود که در آن $۰\leq t\leq ۱$.





به همین صورت می‌توان نشان داد که

۱. وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{۲}$.

۲. محل برخورد میانه‌های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{۳}$.

۳. سه نقطه A، B و C روی یک خط قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a، b و c وجود داشته باشد که $a+b+c=۰$ و $aA+bB+cC=۰$.

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای $Ov_۱,Ov_۲$ تولید می‌شود برابر است با

$$\{A+t_۱v_۱+t_۲v_۲ \mid t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}&\{A+t_۱(B-A)+t_۲(C-A) \ : \ t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}=\\&\{(۱-t_۱-t_۲)A+t_۱B+t_۲C \ : \ t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}=\\&\{aA+bB+cC \ : \ a+b+c=۱\}\end{aligned}$$

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA+bB+cC \ : \ a+b+c=۱\,,\,۰\leq a,b,c\leq ۱\}$$

۷. چهار نقطه A، B، C و D روی یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a، b، c و d وجود داشته باشند که $a+b+c+d=۰$ و $aA+bB+cC+dD=۰$.

توجه. جمع نقاط و ضرب اسکالر آنها به مبدأ وابسته است. بدون مبدأ جمع و ضرب اسکالر نقاط معنی ندارد و با عوض شدن مبدأ حاصل جمع دو نقطه و ضرب یک عدد در یک نقطه تغییر خواهد کرد. به همین جهت معمولاً وابستگی به مبدأ را در عبارت‌ها به‌شکلی نمایش می‌دهند. مثلاً بجای عبارت $2A+3B$ از عبارت $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ استفاده می‌کنند. به پاره‌خط جهت دار $\overrightarrow{OA}$ بردار گویند. بنابراین حاصل عبارت $2A+3B$، زمانی که O مبدأ است، برابر نقطه P می‌شود اگر وتنها اگر $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$. با مشخص بودن مبدأ بین نقاط و بردارها یک تناظر یک به یک ایجاد می‌شود و می‌توان بجای نقاط، برداها و بجای بردارها، نقاط را استفاده کرد.

توجه. با توجه به مطالب بالا عبارت $aA+bB$ که در آن A و B دو نقطه دلخواه و a و b دو عدد حقیقی‌اند، به مبدأ وابسته است و با تغییر مبدأ تغییر می‌کند. با این حال بعضی ترکیب‌های به شکل بالا مستقل از مبدأ هستند. مثلاً $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ نقطه وسط پاره‌خط AB است و بنابراین مستقل از مبدأ خواهد بود.

قضیه. عبارت $aA+bB$ مستقل از مبدأ است اگر و تنها اگر $a+b=1$.

اثبات. فرض کنید حاصل عبارت $aA+bB$ زمانی که O_1 مبدأ است برابر P شده است. یعنی $a\overrightarrow{O_1A}+b\overrightarrow{O_1B}=\overrightarrow{O_1P}$. اگر O_2 را به عنوان مبدأ انتخاب کنیم حاصل عبارت $aA+bB$ برابر است با

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{O_2A}+b\overrightarrow{O_2B} &= a(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1A})+b(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1B})=(a+b)\overrightarrow{O_2O_1}+a\overrightarrow{O_1A}+b\overrightarrow{O_1B}\\ &=(a+b)\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1P}=(a+b-1)\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_2P}\end{aligned}$$

بنابراین اگر نقطه O_2 مبدأ باشد حاصل عبارت $aA+bB$ برابر P می‌شود اگر و تنها اگر $a+b-1=0$.

قضیه. عبارت $a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_kA_k$ مستقل از مبدأ است اگر و تنها اگر $a_1+a_2+\cdots+a_k=1$.

$\mathbb{R}^n$ و صفحه‌های تعمیم یافته در آن

مختصات دکارتی و جمع و ضرب در این مختصات

یکی از متداول‌ترین و مناسب‌ترین روش نمایش نقاط صفحه و فضا به کمک اعداد، استفاده از دستگاه مختصات دکارتی است. به این صورت که در صفحه دو محور مدرج عمود برهم که از مبدأ می‌گذرند انتخاب کرده و هر نقطه را با زوج اعداد حاصل از تصویرهایش روی آن دو محور نمایش می‌دهیم. در فضای سه بعدی نیز همین کار را با سه محور مدرج عمود برهم انجام می‌دهیم. جمع و ضرب اسکالر در این نمایش شکل ساده‌ای خواهند داشت. با توجه به شکلهای زیر اگر $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ نقاط دلخواهی باشند و $r\in\mathbb{R}$ نیز عدد حقیقی دلخواهی باشد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A+B &= (x_۱,y_۱)+(x_۲,y_۲)=(x_۱+x_۲,y_۱+y_۲)\\ rA &= r(x_۱,y_۱)=(rx_۱,ry_۱)\end{aligned}$$

جمع و ضرب در دستگاه مختصات دکارتی برای فضا نیز کاملاً مشابه بالا خواهد بود.
بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند. با این دید می‌توان مفهوم خط و صفحه و فضا را به مجموعه همه n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی که آن را با $\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم، گسترش داد.

$$\mathbb{R}^n=\{(x_۱,\dots,x_n)\ :\ x_i\in\mathbb{R}\}$$

ساختار جبری ارائه شده برای خط و صفحه و فضا را نیز می‌توان به راحتی برای این فضاهای بزرگتر گسترش داد. برای هر دو نقطه $A=(x_۱,\dots,x_n)$ و $B=(y_۱,\dots,y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی $r\in\mathbb{R}$ جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$A+B:=(x_۱+y_۱,\dots,x_n+y_n),\qquad rA:=(rx_۱,\dots,rx_n)$$

به این ترتیب مفاهیم هندسی‌ای مانند خط و پاره‌خط و صفحه و ... را که به کمک جمع و ضرب اسکالر قابل بیان بودند می‌توان برای $\mathbb{R}^n$ نیز گسترش داد. این کار با تفصیل در بخشهای بعدی انجام می‌شود.
در قسمت‌های قبل دیدیم که با مشخص بودن مبدأ بین نقاط فضا و پاره‌خط‌های جهت‌دار تناظری یک به یک ایجاد می‌شود. در نمایش دکارتی مبدأ کاملاً مشخص است. بنابراین هم می‌توانیم به n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی به عنوان نقطه نگاه کنیم و هم می‌توانیم آنها را بردار تصور کنیم. به همین سبب اعضای $\mathbb{R}^n$ را گاهی نقطه و گاهی بردار می‌نامیم، اگر چه دیدگاه برداری غالب است.

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

با توجه به نمایش خط در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌توانیم خطی را که از $A=(a_۱,\dots,a_n)$ می‌گذرد و با بردار ناصفر $v=(b_۱,\dots,b_n)$ تولید می‌شود، به صورت مجموعه زیر تعریف کنیم.

$$\{A+tv\ \mid\ t\in\mathbb{R}\}=\{(a_۱+tb_۱,\dots,a_n+tb_n)\ \mid\ t\in\mathbb{R}\}$$

بنابراین خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned}\{A+t(B-A)\ :\ t\in\mathbb{R}\} &= \{(۱-t)A+tB\ :\ t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{aA+bB\ :\ a+b=۱\}\end{aligned}$$

اگر $P=(1-t)A+tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= P-A = t(B-A) = t\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BP} &= P-B = (1-t)(A-B) = (1-t)\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

به این ترتیب پاره‌خط $\overline{AB}$ نیز کاملاً مشابه قبل برابر است با تمام نقاط $(1-t)A+tB$ که $0\leq t\leq 1$.
صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود برابر است با

$$\{A+t_1v_1+t_2v_2 \mid t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$$

به این ترتیب صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد برابراست با

$$\begin{aligned}&\{A+t_1(B-A)+t_2(C-A) \ : \ t_1,t_2\in\mathbb{R}\} =\\ &\{(1-t_1-t_2)A+t_1B+t_2C \ : \ t_1,t_2\in\mathbb{R}\} =\\ &\{aA+bB+cC \ : \ a+b+c=1\}\end{aligned}$$

و به صورت کلی *صفحه تعمیم یافته*‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای $v_1,\dots,v_k$ تولید می‌شود برابر است با

$$\{A+t_1v_1+t_2v_2+\cdots+t_kv_k \mid t_i\in\mathbb{R}\}$$

با توجه به تعریف بالا نقطه A صفحه تعمیم یافته‌ای است که از نقطه A می‌گذرد و با هیچ برداری تولید نمی‌شود. خط و صفحه معمولی نیز یک صفحه تعمیم یافته هستند. در ادامه به صفحه‌های تعمیم یافته (شامل خط و صفحه معمولی) به صورت خلاصه "*صفحه*" می‌گوییم. بنابراین دقت کنید که آن را با صفحه معمولی اشتباه نگیرید.

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

تعریف و مثال

در قسمت قبل به کمک ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ را معرفی کردیم. در ادامه خواهیم دید که اگر صفحه‌ای از مبدأ $\mathbb{R}^n$ (یعنی نقطه $(O = (۰,۰,...,۰)$) بگذرد خود دارای ساختاری جبری مشابه ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ می‌شود. طبق تعریف، صفحه‌های شامل مبدأ به شکل $t_۱v_۱ + \cdots + t_kv_k \quad | \quad t_i \in \mathbb{R}$ هستند. بنابراین به راحتی می‌توان گزاره زیر را نشان داد.

گزاره. صفحه π از مبدأ می‌گذرد اگر و تنها اگر جمع هر دو عضوش و ضرب اسکالر اعداد حقیقی در هر عضوش، داخل آن صفحه قرار گیرند.

با توجه به این نکته، جمع برداری و ضرب اسکالر که جبر روی $\mathbb{R}^n$ را تشکیل می‌داد، روی صفحه‌های گذرنده از مبدأ نیز یک ساختار جبری ایجاد می‌کنند که همه ویژگی‌های ساختار جبری روی $\mathbb{R}^n$ را دارا است. (چون در واقع همان جمع و ضرب اسکالر $\mathbb{R}^n$ است که به زیرمجموعه‌ای از آن تحدید شده است.) چنین زیرمجموعه‌هایی را زیرفضای $\mathbb{R}^n$ گویند.

تعریف ۱. زیرمجموعه ناتهی $V \subset \mathbb{R}^n$ را زیرفضای آن می‌گوییم هرگاه

۱. برای هر $v_۱$ و $v_۲$ در V داشته باشیم $v_۱ + v_۲ \in V$.

۲. برای هر v در V و هر r در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $rv \in V$.

به عبارت دیگر V زیرفضا است اگر برای هر $v_۱$ و $v_۲$ در V و هر r در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $v_۱ + rv_۲ \in V$.

به این ترتیب صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند. کمی جلوتر ثابت می‌کنیم که زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ نیز صفحه‌های گذرنده از مبدأ هستند. یعنی این دو مفهوم یکسانند. دقت کنید تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد و این نکته موجب می‌شود خیلی از خواص صفحه‌ها را به صورتی ساده‌تر بدست آوریم.

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ و زیرفضای تولید شده

به راحتی از تعریف زیرفضا نتایج زیر به‌دست می‌آیند.

قضیه ۱. هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.

اثبات. چون هر زیرفضایی ناتهی اند برداری مانند v در آن وجود دارد و به خاطر بسته بودن تحت ضرب اسکالر $(۰,...,۰) = ۰.v$ نیز باید در آن باشد.

قضیه ۲. اشتراک هر تعداد زیرفضای $\mathbb{R}^n$، خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

اثبات. فرض کنید V_αها زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^n$ باشند. از آنجایی که همه آنها شامل بردار صفر هستند اشتراک آنها نیز شامل بردار صفر است و در نتیجه ناتهی است. اگر $v_۱, v_۲ \in \bigcap V_\alpha$ آنگاه برای هر α داریم $v_۱, v_۲ \in V_\alpha$ و درنتیجه $v_۱ + rv_۲ \in V_\alpha$. بنابراین $v_۱ + rv_۲ \in \bigcap V_\alpha$ و این نشان می‌دهد اشتراک V_αها خود یک زیرفضا است.

قضیه ۳. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد. زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که هم شامل S است و هم درون همه زیرفضاهای شامل S قرار دارد. به بیان دیگر کوچک‌ترین زیرفضای شامل S وجود دارد.

اثبات. خود $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضایی است که شامل S است. اشتراک همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که شامل S اند، طبق قضیه بالا خود زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ می‌شود که شامل S نیز است. این زیرفضا همان کوچک‌ترین زیرفضای مورد نظر است.

تعریف ۲. کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$ را زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S می‌نامیم و آن را با $\langle S \rangle$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید V یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$، و $v_1,\dots,v_k$ بردارهایی متمایز از آن باشد. از آنجایی که V تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است بردارهایی به صورت $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ نیز داخل V است. به چنین عبارت‌هایی ترکیب خطی k بردار $v_1,\dots,v_k$ می‌گوییم. بنابر قرار داد ترکیب خطی صفرتا بردار را بردار صفر قرار می‌دهیم. به این ترتیب واضح است که ترکیب خطی هر تعداد از اعضای V باز داخل V قرار دارد.

قضیه ۴. $\langle S\rangle=\{t_1v_1+\cdots+t_lv_l \quad | \, l\in N\cup\{0\} \ , \ \ v_i\in S\}$. **به عبارت دیگر فضای تولید شده توسط مجموعه S برابر است با مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S.**

اثبات. طبق آنچه در بالا بیان شد هر ترکیب خطی از اعضای S باید داخل همه فضاهای برداری شامل S، به خصوص فضای برداری تولید شده توسط S، قرار داشته باشد. اگر نشان دهیم مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S خود یک زیرفضا است، این زیرفضا کوچک‌ترین زیرفضای شامل S، یعنی همان زیرفضای تولید شده توسط S خواهد بود. پس باید نشان دهیم مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S یک زیرفضا است. طبق قرار داد بالا بردار صفر در این مجموعه قرار دارد و درنتیجه این مجموعه ناتهی است. همچنین واضح است که جمع دو ترکیب خطی از اعضای S و ضرب یک اسکالر در آن باز به شکل ترکیب خطی‌ای از اعضای S است. بنابراین مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S یک فضای برداری است.

دقت کنید که در بالا مجموعه S ممکن است تهی یا نامتناهی باشد. اگر S تهی باشد مجموعه ترکیب‌های خطی اعضای S (طبق قرارداد بالا) تنها شامل بردار صفر است. اگر نامتناهی باشد یک ترکیب خطی از اعضای S در واقع ترکیبی خطی از متناهی عضو آن است. مجموع نامتناعی هیچ معنی‌ای نمی‌دهد. سری‌هایی هم که در آنالیز به آن برخورد می‌کنیم تنها به کمک مفهوم فاصله و همگرایی می‌توانند معنی پیدا کنند که فعلاً ما هیچ مطلبی در مورد چنین ساختارهایی برای یک فضای برداری بیان نکرده‌ایم.

قضیه ۵. اگر $R\subseteq S\subseteq\mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R\rangle\subseteq\langle S\rangle\subseteq\mathbb{R}^n$.

قضیه ۶. اگر $V\subset\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V\rangle=V$.

قضیه ۷. اگر V و W دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه مجموعه

$$V+W:=\{v+w \quad | \, v\in V \ \ , \ \ w\in W\}$$

نیز یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است و داریم $\langle V\cup W\rangle=V+W$.

اثبات. $V+W$ ناتهی است زیرا شامل صفر است. فرض کنید $u,u'\in V+W$. بنابراین طبق تعریف $v,v'\in V$ و $w,w'\in W$ یافت می‌شوند که $u=v+w$ و $u'=v'+w'$. در نتیجه

$$u+ru'=(v+rv')+(w+rw')\in V+W$$

به این ترتیب $V+W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است که شامل دو زیرفضای V و W نیز است. هر زیرفضایی نیز که شامل V و W باشد باید مجموع‌هایی به شکل $v+w$ را که $v\in V$ و $w\in W$ است داشته باشد. بنابراین $V+W$ کوچک‌ترین زیرفضای شامل V و W است.

تعریف ۳. زیرفضای $V\subseteq\mathbb{R}^n$ را با تولید متناهی گوییم اگر متناهی بردار $v_1,\dots,v_k$ یافت شوند که فضای V را تولید کنند.

با توجه به قضیه ۵ زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $v_1,\dots,v_k$ همان صفحه تولید شده توسط $v_1,\dots,v_k$ است که از مبدأ می‌گذرد. در واقع زیرفضاهایی که با متناهی بردار تولید می‌شوند صفحه‌هایی هستند که از مبدأ می‌گذرند. در قسمت‌های بعد نشان می‌دهیم همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با تولید متناهی هستند و در نتیجه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ همان صفحه‌های گذرنده از مبدأ اند.

استقلال خطی

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعیم یافته

در این قسمت می‌خواهیم معیاری برای بزرگی یک صفحه تعمیم یافته بدست آوریم. مثلاً نقطه که یک صفحه تعمیم یافته است کوچکتر از یک خط است و خط نیز کوچکتر از صفحه معمولی و صفحه معمولی کوچکتر از فضای سه بعدی اطراف ما است. به نظر می‌آید که تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته بتواند معیار مورد نظر باشد. مثلاً نقطه با هیچ برداری تولید نمی‌شود و ما آن را صفر بعدی

می‌دانیم. خط با یک بردار تولید می‌شود و ما آن را یک بعدی می‌دانیم. صفحه معمولی و فضای سه بعدی نیز به ترتیب با دو بردار و سه بردار تولید می‌شوند و ما آنها را دو بعدی و سه بعدی می‌دانیم. به این ترتیب شاید بتوان بُعد یک صفحه تعمیم یافته را تعداد بردارهای تولید کننده آن تعریف کرد و انتظار داشت که این مفهوم همان معیار مورد نظر برای بزرگی یک صفحه تعمیم یافته باشد. اما مشکلاتی و جود دارد.

یک صفحه تعمیم یافته که با یک بردار مانند $v \in \mathbb{R}^n$ تولید می‌شود یک خط در $\mathbb{R}^n$ است به شرط اینکه $v \neq ۰$. اگر $v = ۰$ باشد در واقع این صفحه تعمیم یافته یک نقطه است. به عبارت دیگر در این حالت با حذف کردن v صفحه تعمیم یافته تغییری نمی‌کند. همچنین صفحه تعمیم یافتهای که با دو بردار $v_۱, v_۲ \in \mathbb{R}^n$ تولید می‌شود یک صفحه معمولی در $\mathbb{R}^n$ است به شرط اینکه مضربی از یکدیگر نباشند. اگر هر دو صفر باشند آنگاه با حذف کردن آنها صفحه تعمیم یافته تولید شده تغییری نمی‌کند و در هر دو صورت این صفحه تعمیم یافته یک نقطه خواهد بود. اگر $v_۱$ ناصفر باشد و $v_۲ = rv_۱$ آنگاه واضح است که صفحه تعمیم یافته یک خط در راستای $v_۱$ خواهد بود. به عبارت دیگر با حذف $v_۲$ صفحه تعمیم یافته تغییری نخواهد کرد. این دو مثال نشان می‌دهند که تعداد بردارهایی که یک صفحه تعمیم یافته را تولید می‌کنند زمانی ممکن است معیاری برای بزرگی آن باشند که با حذف هر یک، صفحه تولید شده تغییر کند. به بیانی دیگر باید مجموعه مولدی برای صفحه بیابیم که هیچ عضو زائدی نداشته باشد. با این حال هنوز مسئله‌ای دیگر وجود دارد و آن اینکه ممکن است مجموعه‌های مولد متفاوتی برای یک صفحه وجود داشته باشند که هیچ یک دارای عضو زائد نیز نباشند. در این صورت بعد آن صفحه تعداد اعضای کدام یک باید باشد؟ در ادامه نشان می‌دهیم همه این مجموعه‌ها تعداد اعضایی برابر دارند و در نتیجه در تعریف بُعد مشکلی وجود نخواهد داشت. برای سادگی فرض می‌کنیم صفحه تعمیم یافته مورد نظر از مبدأ می‌گذرد زیرا آنچه در این بحث مهم است بردارهای مولد یک صفحه است که با انتقال تغییری نمی‌کنند.

استقلال خطی

بردار v_i در مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ را زائد می‌گوییم اگر با حذف کردن آن فضای تولید شده توسط این بردارها تغییر نکند. به عبارت دیگر v_i زائد است اگر

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle = \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\rangle$$

در نتیجه مجموعه‌ای از بردارها که هیچ یک از اعضایش زائد نیست، مجموعه‌ای است که هیچ یک از بردارهای آن در فضای تولید شده توسط بردارهای دیگر قرار نگیرد. گزاره زیر بیان ساده‌تری برای معرفی این مجموعه‌ها ارائه می‌کند.

قضیه ۸. هیچ‌یک از بردارهای $v_1,\dots,v_k$ در فضای تولید شده توسط بقیه آنها قرار ندارد اگر و تنها اگر هیچ ترکیب خطی این بردارها مانند $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ صفر نشود مگر در حالتی که همه t_iها صفر باشند.

اثبات. اگر یکی از بردارها مانند v_k در فضای تولید شده توسط بقیه قرار داشته باشد آنگاه

$$v_k = t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1} \quad\Rightarrow\quad t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1}+(-1)v_k = 0$$

یعنی یک ترکیب خطی از v_iها با ضرایب غیرصفر وجود دارد که صفر شده است.

اگر ترکیب خطی $t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ صفر بود در حالی که همه ضرایب آن صفر نبودند، مثلاً اگر $t_k\neq 0$ باشد آنگاه

$$t_1v_1+\cdots+t_{k-1}v_{k-1} = -t_kv_k \quad\Rightarrow\quad v_k = \frac{-t_1}{t_k}v_1+\cdots+\frac{-t_{k-1}}{t_k}v_{k-1}$$

بنابراین $v_k\in\langle v_1,\dots,v_{k-1}\rangle$.

تعریف ۴. به مجموعه‌ای از بردارها که هیچ ترکیب خطی آنها صفر نمی‌شود مگر این که همه ضرایب آن ترکیب خطی صفر باشند، مستقل خطی گوییم. اگر مجموعه‌ای مستقل خطی نباشد به آن وابسته خطی گوییم.

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

ویژگی‌های زیر به‌سادگی از تعریف استقلال خطی و وابستگی خطی نتیجه می‌شود.

۱. مجموعه تهی مستقل خطی است.

۲. مجموعه تک عضوی $\{v\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v\neq 0$.

۳. مجموعه دو عضوی $\{v_1,v_2\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچ کدام مضرب دیگری نباشند.

۴. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مجموعه‌ای مستقل خطی است. (در نتیجه هر مجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است.)

۵. مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچ یک از اعضای آن در فضای تولید شده توسط دیگر اعضا قرار نگیرد. (قضیه ۹)

۶. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی بوده و $v_{k+1}\in\mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد. مجموعه $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v_{k+1}\notin\langle v_1,\dots,v_k\rangle$

اثبات. اگر $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ مستقل خطی باشد طبق ویژگی (۵)، $v_{k+1}\notin\langle v_1,\dots,v_k\rangle$. اگر این مجموعه مستقل خطی نباشد آنگاه ترکیب خطی $t_1v_1+\cdots+t_{k+1}v_{k+1}$ برابر صفر وجود دارد که همه ضرایب آن صفر نیست. ضریب v_{k+1} در این ترکیب خطی نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در

این صورت ترکیب خطی‌ای از $v_1,\dots,v_k$ صفر شده در حالی که همه ضرایب آن صفر نیست و این با استقلال خطی $\{v_1,\dots,v_k\}$ متناقض است. در نتیجه داریم

$$v_{k+1}=\frac{-t_1}{t_{k+1}}v_1+\cdots+\frac{-t_k}{t_{k+1}}v_k \quad \Rightarrow \quad v_{k+1}\in\langle v_1,\dots,v_k\rangle$$

ویژگی (۶) روشی عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی بدست می‌دهد. به این ترتیب که ابتدا بردار ناصفری مانند v_1 را انتخاب می‌کنیم. طبق (۲) می‌دانیم $\{v_1\}$ مستقل خطی است. حال اگر $\langle v_1\rangle$ کل فضا نبود برداری مانند v_2 در فضا هست که در $\langle v_1\rangle$ قرار ندارد. طبق ویژگی (۶). $\{v_1,v_2\}$ مستقل خطی می‌شوند. این روند را تا زمانی که فضای تولید شده توسط بردارهای حاصل کل فضا نباشد می‌توان ادامه داد.

پایه و بُعد

تعریف ۵. مجموعه $\{v_1,\dots,v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مجموعه $\{e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است. زیرا

$$t_1e_1+\cdots+t_ne_n=0 \quad\Rightarrow\quad (t_1,\dots,t_n)=0 \;\Rightarrow\; t_1=\cdots=t_n=0$$

این مجموعه $\mathbb{R}^n$ را نیز تولید می‌کند زیرا عضو دلخواه $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ به صورت $a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ است. بنابراین این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است که به آن پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌گویند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر دو پایه یک فضای برداری دارای تعداد اعضای برابر هستند. به این ترتیب معیاری را که برای سنجش بزرگی زیرفضاها و صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ به دنبال آن بودیم، بدست می‌آوریم.

قضیه ۹. اگر V فضای تولید شده توسط بردارهای $\{v_1,\dots,v_k\}$ باشد و $\{w_1,\dots,w_l\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی در V باشد. آنگاه

۱. $l\le k$.

۲. **$\{v_1,\dots,v_k\}$ را می‌توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه V تقلیل داد.**

۳. **$\{w_1,\dots,w_l\}$ را می‌توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه V گسترش داد.**

۴. **V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابر هستند.**

اثبات. قسمت (۱). روش اثبات با جای‌گذاری اعضای $\{w_1,\dots,w_l\}$ بجای اعضای $\{v_1,\dots,v_k\}$ است به‌گونه‌ای که در هر مرحله فضای تولید شده توسط مجموعه جدید همچنان V باشد. فرض کنید در مرحله iام $w_1,\dots,w_i$ را بجای i تا از بردارهای $\{v_1,\dots,v_k\}$ مثلاً $v_1,\dots,v_i$ قرار داده‌ایم به‌گونه‌ای که فضای تولید شده توسط این بردارها V است. یعنی

$$\langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle=V$$

در ابتدا $i=0$ است. نشان می‌دهیم که w_{i+1} را می‌توان بجای یکی دیگر از v_jهای باقی مانده قرار داد که همچنان این خاصیت برقرار باشد. چون $w_{i+1}\in V=\langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},\dots,v_k\rangle$ خواهیم داشت

$$w_{i+1}=t_1w_1+\cdots+t_iw_i+t_{i+1}v_{i+1}+\cdots+t_kv_k.$$

در بالا همه ضرایب $t_{i+1},\dots,t_k$ نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت w_{i+1} به صورت ترکیب خطی $w_1,\dots,w_i$ خواهد بود و این با مستقل خطی بودن $\{w_1,\dots,w_l\}$ متناقض است. پس یکی از این ضرایب مثلاً t_{i+1} ناصفر است. بنابراین

$$v_{i+1}=\frac{-t_1}{t_{i+1}}w_1+\cdots+\frac{-t_i}{t_{i+1}}w_i+\frac{1}{t_{i+1}}w_{i+1}+\frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}}v_{i+2}+\cdots+\frac{-t_k}{t_{i+1}}v_k$$

به عبارت دیگر

$$v_{i+1}\in\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle &= \langle w_1,\dots,w_i,w_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle\\ &= \langle w_1,\dots,w_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_k\rangle = V\end{aligned}$$

این الگوریتم تضمین می‌کند که اگر v_iای باقی مانده باشد آنگاه باید w_iای نیز باقی مانده باشد که بتوان w_i را بجای آن وارد مجموعه بالا کرد، زیرا اگر در مرحله $i < l$ام v_jای وجود نداشته باشد آنگاه $w_{i+1} = t_1w_1 + \dots + t_iw_i$ که با فرض مستقل خطی بودن $\{w_1,\dots,w_l\}$ متناقض است. در نتیجه $l \le k$.

قسمت (۲). اگر $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی نباشند یکی از اعضای آن زائد است و با حذفش فضای تولید شده توسط بقیه همچنان V خواهد بود. این روند را آنقدر انجام می‌دهیم تا دیگر عضو زائدی نماند. مجموعه حاصل طبق قضیه ۹ مستقل خطی است و همچنان V را تولید می‌کند.

قسمت (۳). اگر $\langle w_1,\dots,w_l\rangle \subsetneq V$، بنابر ویژگی ششم برای مجموعه‌های مستقل خطی، با اضافه کردن عضوی در V که در $\langle w_1,\dots,w_l\rangle$ نیست به مجموعه $\{w_1,\dots,w_l\}$، مجموعه مستقل خطی بزرگتری به‌دست می‌آید. از آنجایی که تعداد اعضای یک مجموعه مستقل خطی در V نمی‌تواند از k بیشتر باشد، با ادامه این کار سرانجام به مجموعه‌ای مستقل خطی می‌رسیم که V را تولید می‌کند.

قسمت (۴). فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ و $\{w_1,\dots,w_l\}$ دو پایه برای V باشند. طبق تعریف پایه، $\{v_1,\dots,v_k\}$ فضای Vرا تولید می‌کند و $\{w_1,\dots,w_l\}$ مستقل خطی است. پس طبق قسمت اول این قضیه باید داشته باشیم $l \le k$. به همین صورت $\{w_1,\dots,w_l\}$ فضای Vرا تولید می‌کند و $\{v_1,\dots,v_k\}$ مستقل خطی است. بنابراین $k \le l$ و در نتیجه $k = l$ است.

طبق این قضیه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که با متناهی بردار تولید می‌شوند (یعنی صفحه‌های گذرنده از مبدأ)، دارای پایه هستند. ولی معلوم نیست که آیا همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با متناهی بردار تولید می‌شوند یا خیر؟ گزاره زیر که نتیجه قضیه بالا است تضمین می‌کند که همه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ با تولید متناهی اند و در نتیجه زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ همان صفحه‌های گذرنده از مبدأ در $\mathbb{R}^n$ خواهند بود.

قضیه ۱۰. هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

اثبات. برای ساختن یک پایه برای زیرفضای $V \subset \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ای مستقل خطی در آن می‌یابیم که دیگر نتوانیم آن را بزرگ‌تر کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $A = \varnothing$. می‌دانیم A مستقل خطی است و $\langle A\rangle \subset V$. به صورت استقرایی در هر مرحله یک عضو از V به مجموعه A اضافه می‌کنیم به گونه‌ای که A همچنان مستقل خطی بماند. اگر در مرحله kام، $\langle A\rangle = V$، آنگاه A پایه‌ای برای V خواهد بود، چون هم مستقل است و هم V را تولید می‌کند. اگر چنین نباشد، یعنی اگر $\langle A\rangle \neq V$ عضوی از V وجود دارد که در $\langle A\rangle$ نیست. با اضافه کردن آن عضو به A، مجموعه حاصل همچنان مستقل خطی باقی می‌ماند. از آنجا که A زیر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ نیز هست و $\mathbb{R}^n$ نیز با n بردار تولید می‌شود، طبق قضیه قبل تعداد اعضای مجموعه A بیشتر از n نمی‌تواند باشد. بنابراین روند بزرگ کردن مجموعه A حداکثر تا n مرحله می‌تواند انجام شود.

تعریف ۶. تعداد اعضای هر یک از پایه‌های زیرفضای $V \subseteq \mathbb{R}^n$ را بُعد آن می‌گوییم و آن را با $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱. اگر $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $\dim(V) \le \dim(W)$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $V = W$ باشد.

اثبات. فرض کنید A یک پایه برای V باشد. A مجموعه مستقل خطی است که داخل W نیز قرار دارد. طبق قضیه بالا تعداد اعضای A از تعداد اعضای پایه‌ای برای W بیشتر نخواهد بود. یعنی

$$\dim(V) = |A| \le \dim(W)$$

در صورتی که $W \neq V$ آنگاه عضوی در W وجود دارد که در $V = \langle A\rangle$ نیست. با اضافه کردن این بردار به A، مجموعه حاصل همچنان مجموعه‌ای مستقل خطی در W خواهد بود. پس تعداد اعضای آن نمی‌تواند از بعد W بیشتر باشد. یعنی

$$\dim(V) = |A| < |A + 1| \le \dim(W)$$

هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در $\mathbb{R}^n$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است. زیرا اگر پایه نباشد برداری در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که داخل فضای تولید شده توسط آن مجموعه قرار نگرفته و در نتیجه با اضافه کردنش به آن مجموعه $n+1$ بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بدست می‌آید در حالی که این فضای برداری با n بردار استاندارد $e_1,\dots,e_n$ تولید شده است. با این استدلال می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

هر n برداری که $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند مستقل خطی هستند. اگر n بردار داده شده مستقل خطی نباشند با حذف برداری از آنها مجموعه‌ای با کمتر از n عضو به‌دست می‌آید که همچنان $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند در حالی که $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای n عضوی است و تعداد اعضای یک مجموعه مستقل خطی در یک فضا نمی‌تواند از تعداد مولدی برای آن بیشتر باشد. با همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

در گذشته نشان دادیم که مجموع دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ خود یک زیرفضای آن است. اکنون می‌توانین رابطه بعد آن را با بعد آن دو زیرفضا به‌دست آوریم.

قضیه. فرض کنید $V,W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت

$$\dim(V\cap W)+\dim(V+W)=\dim V+\dim W.$$

اثبات. فرض کنید $\{u_1,\dots,u_k\}$ پایه‌ای برای $V\cap W$ باشد. این پایه را به پایه‌هایی برای V,W گسترش می‌دهیم. به این ترتیب فرض می‌کنیم $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s\}$ پایه‌ای برای V و $\{u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_r\}$ پایه‌ای برای W باشد. ثابت می‌کنیم $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\}$ پایه‌ای برای $V+W$ است و در نتیجه حکم قضیه ثابت می‌شود. این مجموعه مستقل خطی است زیرا

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i=0\Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i=-\sum_{i=1}^{r}c_iw_i$$

از آنجایی که طرف راست تساوی بالا در W و طرف چپ آن در V قرار دارد بردار بالا داخل $V\cap W$ خواهد بود. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{k}d_iu_i=-\sum_{i=1}^{r}c_iw_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{k}d_iu_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i=0$$

چون $\{u_1,\dots u_k,w_1,\dots,w_k\}$ پایه‌ای برای W است پس همه ضرایب ترکیب خطی باید صفر باشند، یعنی

$$d_1=\cdots=d_k=c_1=\cdots=c_r=0$$

بنابراین داریم

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i=0$$

از آنجایی که $\{u_1,\dots u_k,v_1,\dots,v_k\}$ پایه‌ای برای V است پس همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشند, یعنی

$$a_1=\cdots=a_k=b_1=\cdots=b_s=0$$

این نتیجه می دهد که $\{u_1,\dots u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\}$ مستقل خطی است. باید نشان دهیم که این مجموعه فضای $V+W$ را نیز تولید می‌کند. برای هر $x\in V+W$ بردارهای $v\in V$ و $w\in W$ وجود دارند که $x=v+w$. چون $v\in V$ و $w\in W$ داریم

$$v=\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{s}b_iv_i,\qquad w=\sum_{i=1}^{k}a_i^*u_i+\sum_{i=1}^{r}c_iw_i.$$

بنابراین

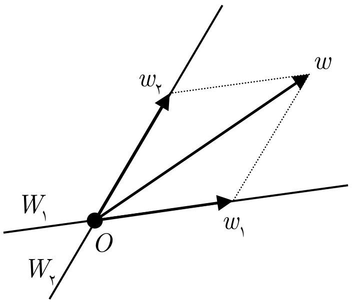
$$x=v+w=\sum_{i=1}^{k}(a_i+a_i^*)u_i+\sum_{i=1}^{r}b_iw_i+\sum_{i=1}^{s}c_iv_i$$

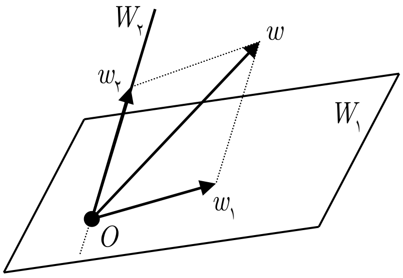
این نتیجه می دهد که

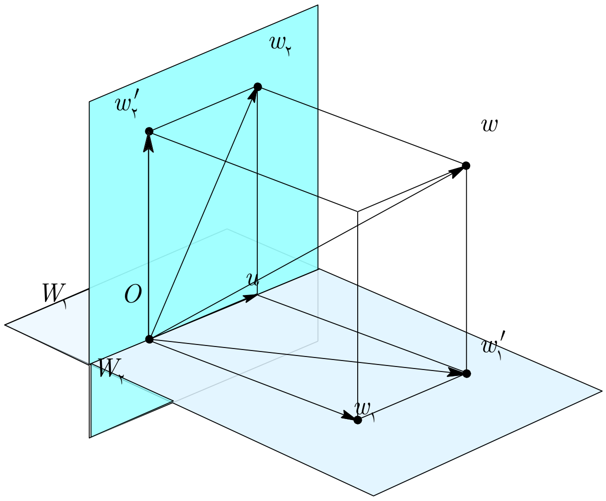
$$V+W\subseteq\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\rangle$$

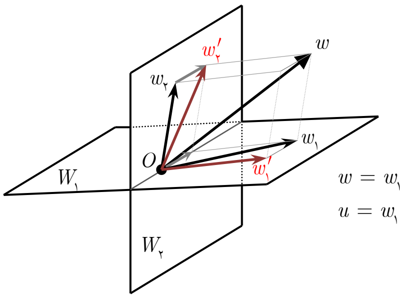
از آنجایی که اعضای این مجموعه داخل $V+W$ هستند فضای تولید شده توسط آنها داخل $V+W$ قرار دارد. بنابراین $V+W=\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_r\rangle$. پس حکم اثبات شد.

بنابر قضیه بالا اگر $W_1\cap W_2=\{0\}$ آنگاه $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$. در واقع با توجه به اثبات بالا اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای W_1+W_2 خواهد بود. در این حالت هر عضو $w\in W=W_1+W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w=w_1+w_2$ دارد که در آن $w_1\in W_1$ و $w_2\in W_2$. زیرا اگر $w=w_1+w_2=w_1'+w_2'$ دو نمایش به صورت بالا باشند آنگاه $w_1-w_1'=w_2'-w_2$. اما طرف چپ این تساوی در W_1 و طرف راست آن در W_2 قرار دارد. بنابراین این بردار باید در $W_1\cap W_2$ قرار داشته باشد، یعنی باید صفر باشد. در نتیجه $w_1=w_1'$ و $w_2=w_2'$. اگر $W_1\cap W_2\neq\{0\}$ آنگاه هیچ یک از این ویژگی‌ها برقرار نخواهند بود.









$$w = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$$
$$u = w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2$$

۲. فضای برداری

در فصل پیش ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ و زیرفضاهای آن بررسی شد. همه نتایج فصل پیش با توجه به ساختار جبری معرفی شده روی $\mathbb{R}^n$ به‌دست آمدند. بنابراین هر جای دیگر که ساختار جبری مشابهی وجود داشته باشد نتایج فصل پیش نیز برقرار خواهند بود. برای مثال مجموعه چند جمله‌ای‌های حقیقی با درجه کمتر از n دارای ساختار جبری مشابه $\mathbb{R}^n$ است. هر دو چند جمله‌ای را می‌توان باهم جمع کرد و یک عدد حقیقی را در یک چند جمله‌ای ضرب کرد. این دو عمل دارای ویژگی‌های مشابه عمل‌های جمع برداری و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^n$ اند. بنابراین مفاهیمی مثل زیرفضاها، مجموعه‌های مستقل خطی، پایه و بعد برای این مجموعه نیز قابل تعریف اند و قضایای فصل پیش در مورد این مفاهیم همچنان برقرار خواهند بود. چند جمله‌ای‌های مختلط نیز دارای ویژگی‌هایی مشابه‌اند. تنها فرقی که در اینجا وجود دارد این است که اسکالرها می‌توانند مختلط باشند. ولی چون اعداد مختلط نیز دارای ساختار جبری مشابه اعداد حقیقی است هیچ مشکلی در تعمیم مفاهیم فصل پیش برای چند جمله‌ای‌های مختلط ایجاد نمی‌شود. در این فصل این موضوع را به صورتی جامع بررسی می‌کنیم. ابتدا آن دسته از ویژگی‌های جبری‌ای را که در بررسی‌های ما مهم بودند مورد بازبینی قرار می‌دهیم.

میدان مجموعه‌ای با ساختار جبری مشابه $\mathbb{R}$

ویژگی‌های جبری اعداد حقیقی که در فصل پیش مورد استفاده قرار گرفتند عبارتند از

۱. (ویژگی‌های جمع). $\mathbb{R}$ به همراه عمل جمع یک گروه آبلی است، یعنی

- (شرکت پذیری). برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s+t)+r=s+(t+r)$.
- (جابجایی). برای هر s,t در $\mathbb{R}$ داریم $s+t=t+s$.
- (وجود عضو خنثی). جمع هر عددی در $\mathbb{R}$ با صفر برابر است با همان عدد.
- (وجود عضو قرینه یا وارون جمع). برای هر عددی مانند $t\in\mathbb{R}$، عددی مانند $s\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $t+s=0$. (معمولاً قرینه t را با $-t$ نمایش می‌دهیم.)

۲. (ویژگی‌های ضرب). $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ به همراه عمل ضرب یک گروه آبلی است، یعنی

- (شرکت پذیری). برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s.t).r=s.(t.r)$.
- (جابجایی). برای هر s,t در $\mathbb{R}$ داریم $s.t=t.s$.
- (وجود عضو خنثی ضرب). حاصلضرب هر عدد حقیقی در ۱ برابر است با همان عدد.
- (وجود عضو وارون ضرب). برای هر عدد ناصفری مانند $s\in\mathbb{R}$ عددی مانند t وجود دارد که $s.t=1$. (معمولاً وارون t را با t^{-1} یا $\frac{1}{t}$ نمایش می‌دهیم.)

۳. (رابطه جمع و ضرب نسبت به هم). عمل ضرب روی عمل جمع پخش می‌شود، یعنی

- برای هر s,t,r در $\mathbb{R}$ داریم $(s+t).r=s.r+t.r$.

این ویژگی‌ها برای اعمال جمع و ضرب اعداد مختلط یا گویا نیز برقرار اند. در نتیجه مجموعه اسکالرها می‌توانند اعداد مختلط یا گویا باشند. مجموعه‌های زیاد دیگری نیز با این ساختار جبری وجود دارند که مثال‌هایی از آنها را جلوتر می‌بینیم.

تعریف. **به مجموعه ناتهی F با دو عمل + و. *میدان* گوییم هرگاه این دو عمل دارای ویژگی‌های بالا باشند، یعنی**

۱. (ویژگی‌های جمع). F به همراه عمل جمع یک گروه آبلی باشد، یعنی

- **(شرکت پذیری). برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s+t)+r=s+(t+r)$.**
- **(جابجایی). برای هر s,t در F داشته باشیم $s+t=t+s$.**
- **(وجود عضو خنثی). عضوی مانند 0 در F وجود داشته باشد که برای هر s در F، $s+0=s$. (به این عضو معمولاً صفر میدان گفته می‌شود)**
- **(وجود عضو قرینه). برای هر $t\in F$ عضوی مانند $s\in F$ وجود داشته باشد که $t+s=0$. (معمولاً قرینه t را با $-t$ نمایش می‌دهند)**

۲. (ویژگی‌های ضرب). مجموعه اعضای ناصفر با عمل ضرب یک گروه آبلی باشد، یعنی

- **(شرکت پذیری). برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s.t).r=s.(t.r)$.**
- **(جابجایی). برای هر s,t در F داشته باشیم $s.t=t.s$.**
- **(وجود عضو خنثی ضرب). عضوی ناصفر مانند ۱ در F وجود داشته باشد که برای هر $s\in F$، $s.1=s$. (به این عضو معمولاً یک گفته می‌شود)**
- **(وجود عضو وارون ضرب). برای هر عضو ناصفر مانند t عضوی مانند s وجود داشته باشد که $s.t=1$.**

۳. (رابطه جمع و ضرب نسبت به هم). عمل ضرب روی عمل جمع پخش شود، یعنی

- **برای هر s,t,r در F داشته باشیم $(s+t).r=s.r+t.r$.**

نکات زیر به سادگی از ویژگی‌های بالا نتیجه می‌شود.

- صفر و یک در میدان یکتا هستند. (یعنی عضو دیگری با ویژگی آنها وجود ندارد.)
- وارون جمعی یک عضو (قرینه آن عضو) و وارون ضربی یک عضو ناصفر یکتا هستند.
- حاصل ضرب صفر در هر عضو میدان برابر صفر می‌شود.
- حاصل‌ضرب دو عضو ناصفر یک عضو ناصفر است.

مثال. فرض کنید n یک عدد طبیعی است. دو عدد صحیح را همنهشت به پیمانه n گوییم هرگاه باقی‌مانده آنها بر n برابر باشند. به عبارت دیگر $x \underset{n}{\equiv} y$ اگر $n \mid x - y$. همنهشتی یک رابطه هم‌ارزی روی عداد صحیح است. مجموعه دسته‌های این هم‌ارزی را با $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهند. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که جمع و ضرب اعداد صحیح روی $\mathbb{Z}_n$ اعمال جمع و ضربی القا می‌کنند که همه ویژگی‌های جمع و ضرب میدان را جز احتمالاً وجود عضو وارون ضرب دارند. اگر n به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد آنگاه حاصل‌ضرب دسته‌های هم‌ارزی متناظر این دو عدد برابر دسته هم‌ارزی عدد صفر است. بنابراین در این حالت $\mathbb{Z}_n$ میدان نیست. اما اگر n عددی اول باشد این مشکل وجود ندارد و درنتیجه $\mathbb{Z}_p$ اگر p اول باشد یک میدان است. توجه کنید که این میدان p عضو دارد و اگر یک را p بار با خودش جمع کنیم عضو صفر بدست می‌آید. به عبارت دیگر در این میدان $p = ۰$. مشخصه یک میدان کوچک‌ترین عدد طبیعی p است که اگر p بار یک را با خودش جمع کنیم عضو صفر بدست می‌آید. اگر چنین عددی وجود نداشت می‌گوییم مشخصه میدان برابر بینهایت است. خواننده به‌سادگی می‌تواند بررسی کند که مشخصه یک میدان حتماً باید اول باشد.

فضای برداری مجموعه‌ای با ساختار مشابه $\mathbb{R}^n$

در قسمت قبل ویژگی‌های جبری مورد نیاز برای اسکالرها بررسی شدند. در این قسمت ویژگی‌های جبری $\mathbb{R}^n$ مورد توجه قرار خواهند گرفت.

$\mathbb{R}^n$ دارای دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر است که دارای ویژگی‌های زیر اند.

۱. (ویژگی‌های جمع برداری). $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع برداری یک گروه آبلی است، یعنی

(شرکت پذیری). برای هر u,v,w در $\mathbb{R}^n$ داریم $(u+v)+w=u+(v+w)$.

(جابجایی). برای هر u,v در $\mathbb{R}^n$ داریم $u+v=v+u$.

(وجود عضو خنثی). جمع بردار صفر با هر بردار در $\mathbb{R}^n$ برابر همان بردار است.

(وجود عضو قرینه). برای هر $v\in\mathbb{R}^n$ عضوی مانند $u\in\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $v+u=0$. (معمولاً قرینه v را با $-v$ نمایش می‌دهیم)

۲. (ویژگی‌های ضرب اسکالر).

(شرکت پذیری). برای هر s,t در $\mathbb{R}$ و هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $(s.t).v=s.(t.v)$.

برای هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $1.v=v$.

۳. (رابطه جمع و ضرب اسکالر نسبت به هم). عمل ضرب اسکالر روی عمل جمع اعضای $\mathbb{R}^n$ و همچنین جمع اعداد در میدان $\mathbb{R}$ پخش می‌شود، یعنی

برای هر t در $\mathbb{R}$ و هر u,v در $\mathbb{R}^n$ داریم $t.(u+v)=t.u+t.v$.

برای هر s,t در $\mathbb{R}$ و هر v در $\mathbb{R}^n$ داریم $(s+t).v=s.v+t.v$.

توجه داشته باشید که در اینجا اسکالرها خود یک میدان اند و دارای جمع و ضرب هستند. همچنین می‌توانیم آنها را در بردارها ضرب کنیم که حاصل یک بردار می‌شود. این ضرب با عمل ضرب بین اسکالرها تفاوت دارد. با این حال به آن ضرب اسکالر گوییم و منظورمان ضرب یک اسکالر در یک بردار است. دو بردار را نیز می‌توان جمع کرد که نتیجه آن یک بردار می‌شود. اگر چه ویژگی‌های جمع برداری همان ویژگی‌های جمع بین اسکالرها هستند اما این دو جمع با هم متفاوت اند.

تعریف فضای برداری

فرض کنید اعضای مجموعه V را بتوان با هم جمع کرد به گونه‌ای که حاصل باز عضوی از آن مجموعه باشد. همچنین فرض کنید بتوان اعداد میدان F را (که معمولاً به آنها اسکالر می‌گوییم) در اعضای V ضرب کرد به گونه‌ای که حاصل باز عضوی در V باشد. در این صورت می‌گوییم V به همراه این دو عمل یک *فضای برداری روی میدان* F است هرگاه این دو عمل دارای ویژگی‌های زیر باشند.

۱. (ویژگی‌های جمع). V به همراه عمل جمع یک گروه آبلی باشد، یعنی

(شرکت پذیری). برای هر u,v,w در V داشته باشیم $(u+v)+w=u+(v+w)$.

(جابجایی). برای هر u,v در V داشته باشیم $u+v=v+u$.

(وجود عضو خنثی). عضوی مانند 0 در V وجود داشته باشد که برای هر v در V، $v+0=v$. معمولاً به این عضو صفر V گوییم و نباید آن را با صفر میدان F اشتباه کنید.

(وجود عضو قرینه). برای هر $v\in V$ عضوی مانند $u\in V$ وجود داشته باشد که $v+u=0$. (معمولاً قرینه v را با $-v$ نمایش می‌دهیم).

۲. (ویژگی‌های ضرب اسکالر).

(شرکت پذیری) برای هر s,t در F و هر v در V داشته باشیم $(st).v=s.(t.v)$.

برای هر v در V داشته باشیم $1.v=v$.

---

۳. (رابطه جمع و ضرب اسکالر نسبت به هم). عمل ضرب اسکالر روی عمل جمع اعضای V و همچنین جمع اعداد در میدان پخش شود، یعنی

برای هر t در F و هر u,v در V داشته باشیم $t.(u+v)=t.u+t.v$.

برای هر s,t در F و هر v در V داشته باشیم $(s+t).v=s.v+t.v$.

معمولاً اعضای V را *بردار* می‌نامیم و به عمل جمع آنها *جمع برداری* می‌گوییم. هر گاه روشن باشد که با چه میدانی سروکار داریم، به V برای اختصار *فضای برداری* می‌گوییم. معمولاً هم صفر میدان را و هم صفر فضای برداری را با ۰ نمایش می‌دهیم. این ممکن است کمی گمراه کننده بنظر برسد. به هر حال باید دقت داشت که اگر ۰ در یک بردار ضرب شود صفر میدان است و اگر با یک بردار جمع شود صفر فضای برداری است.

نکات زیر به سادگی از ویژگی‌های بالا نتیجه می‌شود.

- بردار صفر در یک فضای برداری یکتا است. یعنی عضو دیگری با ویژگی آن وجود ندارد. زیرا

$$\left.\begin{array}{l}\forall v\in V\ :\ 0+v=v\\ \forall v\in V\ :\ \overset{*}{0}+v=v\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad 0=0+\overset{*}{0}=\overset{*}{0}$$

- قرینه هر بردار یکتا است. زیرا فرض کنید u,u' هردو قرینه بردار v باشد. آنگاه

$$u=u+0=u+(v+u')=(u+v)+u'=0+u'=u'$$

- اگر $u+v=w+v$ آنگاه $u=w$. برای اثبات کافی است دو طرف تساوی را با قرینه v جمع کنید.
- اگر $t.u=t.w$ و t اسکالری ناصفر باشد آنگاه $u=w$. برای اثبات کافی است دو طرف تساوی را در وارون t ضرب کنید و از ویژگی $1.v=v$ استفاده کنید.
- حاصل ضرب عدد صفر در هر بردار برابر بردار صفر می‌شود. کافی است دو طرف تساوی $0.v=(0+0).v=0.v+0.v$ را با قرینه $0.v$ جمع کنید.
- حاصل ضرب قرینه عدد ۱ در هر برداری برابر قرینه آن بردار می‌شود. به عبارت دیگر همیشه $(-1).v=-v$. زیرا

$$0=0.v=(1+(-1)).v=1.v+(-1).v=v+(-1).v$$

زیرفضاهای برداری

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W\subseteq V$ مجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. W را زیرفضای برداری V گوییم اگر با همان جمع برداری و ضرب اسکالر روی V خود یک فضای برداری روی میدان F باشد. به این ترتیب لازم است که جمع هر دو بردار در W برداری در W باشد. همچنین باید حاصل ضرب هر عدد در هر بردار W، برداری در W باشد. به عبارت دیگر W باید تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر V بسته باشد. یعنی جمع هر دو عضو W و ضرب هر اسکالر در هر عضو W همچنان برداری در W باشد.

از طرفی دیگر اگر زیر مجموعه ناتهی $W\subseteq V$ تحت جمع برداری و ضرب اسکالر روی V بسته باشد آنگاه با توجه به ویژگی‌های بالا بردار صفر و قرینه هر عضو W، در W قرار خواهند داشت. ویژگی‌های دیگر عمل جمع برداری و ضرب اسکالر به وضوح برای بردارهای داخل W نیز برقرارند زیرا برای همه بردارهای داخل V برقرارند. بنابراین W با جمع برداری و ضرب اسکالر روی V خود یک فضای برداری خواهد بود.

گزاره. **زیر مجموعه ناتهی W از فضای برداری V زیرفضای برداری آن است اگر و تنها اگر تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد. به عبارت دیگر زیر مجموعه ناتهی W از فضای برداری V زیرفضای برداری آن است اگر و تنها اگر برای هر $r\in F$ و هر $w_1,w_2\in W$ داشته باشیم** $w_1+rw_2\in W$.

ویژگی‌های فضای برداری

همه ویژگی‌هایی که در فصل قبل برای $\mathbb{R}^n$ نشان دادیم برای یک فضای برداری دلخواه نیز برقرار اند. برای یادآوری همه آنها را در اینجا به صورت خلاصه ذکر می‌کنیم. اثبات این ویژگی‌ها کاملاً شبیه اثبات آنها برای $\mathbb{R}^n$ است.

۱. اشتراک هر تعداد از زیرفضاها خود یک زیرفضای برداری است.

۲. کوچک‌ترین زیرفضای شامل مجموعه S وجود دارد که آن را زیرفضای تولید شده توسط S می‌نامیم و با $\langle S\rangle$ نمایش می‌دهیم. در واقع این زیرفضا برابر است با

$$\langle S\rangle = \{t_1v_1 + \ldots + t_kv_k : k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, v_i \in S, t_i \in F\}$$

یعنی $\langle S\rangle$ مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S است.

۳. اگر $S \subseteq T$ آنگاه $\langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$.

۴. اگر $W \subseteq V$ زیرفضایی از V باشد آن گاه $\langle W\rangle = W$.

۵. اگر $W_1, W_2 \subseteq V$ زیرفضاهایی از V باشند آنگاه

$$\langle W_1 \cup W_2\rangle = W_1 + W_2 \doteq \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

۶. فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از بردارها است. تغییرات زیر روی مجموعه S هیچ تغییری در فضای تولید شده توسط آن ایجاد نمی‌کند.

الف) جابجا کردن اعضای S. (واضح است)

ب) ضرب کردن یک عضو S در اسکالری ناصفر.

ج) جمع کردن مضربی از یک عضو S با عضو دیگر.

د) اضافه کردن عضوی از فضای تولید شده توسط S به S.

۷. مجموعه S را مستقل خطی گویند اگر هیچ ترکیب خطی از اعضای متمایز S برابر صفر نشود مگر اینکه همه ضرایبش صفر باشد. به عبارت دیگر اگر $v_1, \ldots, v_k$ اعضایی متمایز در S باشند آنگاه

$$t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \cdots = t_k = 0$$

۸. S مستقل خطی است اگر وتنها اگر فضای تولید شده توسط مجموعه S با حذف هر عضو آن اکیداً کوچک شود. به عبارت دیگر S مستقل خطی است اگر وتنها اگر برای هر $s \in S$، داشته باشیم $\langle S \setminus \{s\}\rangle \subsetneq \langle S\rangle$.

۹. تهی مجموعه‌ای مستقل خطی است.

۱۰. هر زیر مجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مستقل خطی است.

۱۱. اگر S مستقل خطی باشد هر بردار $\langle S\rangle$ دارای نمایش یکتا به صورت ترکیب خطی اعضای S است.

۱۲. اگر S مستقل خطی و $v \notin \langle S\rangle$ آن گاه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است.

یک *پایه* برای فضای V مجموعه‌ای مستقل خطی است که آن فضا را نیز تولید کند. اگر یک فضایی با متناهی بردار تولید شود به آن فضا، فضای برداری با تولید متناهی می‌گوییم.

۱۳. اگر $V = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ و $\{w_1, \ldots, w_l\} \subseteq V$ مستقل خطی باشد آنگاه

۱. $l \leq k$

---

۲. v_iها را می‌توان به یک پایه برای V تقلیل داد.

۳. w_iها را می‌توان به یک پایه برای V گسترش داد.

۴. V دارای پایه است وتعداد اعضای هر دو پایه V یکسان است.

بنابراین هر فضای برداری با تولید متناهی دارای یک پایه است و تعداد اعضای هر دو پایه آن نیز یکسان است. به این عدد بُعد آن فضای برداری می‌گوییم. دقت کنید که اگر فضایی با تولید متناهی نباشد آنگاه هیچ پایه متناهی نخواهد داشت. به همین سبب به این فضاهای برداری فضای با بعد نامتناهی نیز گفته می‌شود. البته قضیه بالا چیزی در مورد وجود پایه برای این نوع فضاها نمی‌گوید. ولی به روشی دیگر می‌توان نشان داد هر فضای برداری دارای پایه است.

۱۴. اگر V با تولید متناهی باشد و $W \subseteq V$ زیرفضایی از آن باشد آنگاه W نیز با تولید متناهی است و $\dim W_1 \leq \dim W_2$. تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $W = V$.

۱۵. هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در یک فضای برداری n بعدی پایه‌ای برای آن است.

۱۶. هر مجموعه n عضوی که یک فضای برداری n بعدی را تولید کند پایه‌ای برای آن است.

۱۷. اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای با تولید متناهی در فضای برداری V باشند آنگاه

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ آنگاه $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. در این حالت هر عضو $w \in W = W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت $w = w_1 + w_2$ دارد که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$. به w_1 و w_2 مولفه‌های w در تجزیه $W = W_1 + W_2$ می‌گویند. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 یک پایه برای W خواهد بود. این ویژگی‌های مهم در چنین تجزیه‌ای برای k زیرفضا نیز برقرار است. در قسمت بعد این موضوع به صورت مبسوط شرح داده خواهد شد.

جمع مستقیم زیرفضاها

فرض کنید $V_1,\ldots,V_k$ زیرفضاهایی از V باشند. اگر تساوی

$$v_1+\cdots+v_k=0$$

که در آن $v_1\in V_1,\ldots,v_k\in V_k$، تنها زمانی اتفاق بیفتد که $v_1=\cdots=v_k=0$، $V_1,\ldots,V_k$ را *مستقل خطی* می‌نامیم.

قضیه. فرض کنید $V_1,\ldots,V_k$ زیرفضاهایی با بعد متناهی از V اند. گزاره‌های زیر معادل‌اند.

$V_1,\ldots,V_k$ مستقل خطی اند.

اگر $\beta_1,\ldots,\beta_k$ به‌ترتیب پایه‌هایی برای $V_1,\ldots,V_k$ باشند، آنگاه دنباله $\beta_1,\ldots,\beta_k$ پایه‌ای برای $V_1+\cdots+V_k$ است.

پایه‌های $\beta_1,\ldots,\beta_k$ به‌ترتیب برای $V_1,\ldots,V_k$ وجود دارند که دنباله $\beta_1,\ldots,\beta_k$ پایه‌ای برای $V_1+\cdots+V_k$ باشد.

$\dim\ V_1+\cdots+V_k\ =\dim V_1+\cdots+\dim V_k$

برای هر $1\le i\le k$، اشتراک V_i با مجموع زیرفضاهای دیگر، زیرفضای بدیهی صفر است.

برای هر $1\le i\le k$، $V_i\cap\ V_1+\cdots+V_{i-1}\ =\{0\}$

هر عضو $V_1+\cdots+V_k$ نمایش یکتا به صورت $v_1+\cdots+v_k$ دارد که در آن $v_i\in V_i$.

نکته. این قضیه برای زیرفضاهای دلخواه $V_1,\ldots,V_k$ اگرچه با بعد متناهی نیز نباشند، برقرار است.

تعریف. در صورتی که $V_1,\ldots,V_k$ مستقل خطی باشند مجموع $V_1+\cdots+V_k$ را مجموع مستقیم V_iها می‌نامند و برای تاکید، این مجموع را به صورت $V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ نمایش می‌دهند.

اثبات.

(۱) ⇐ (۲). فرض کنید $\beta_i=\{v_1^i,\ldots,v_{k_i}^i\}$ و

$$(a_1^1v_1^1+\cdots+a_{k_1}^1v_{k_1}^1)+(a_1^2v_1^2+\cdots+a_{k_2}^2v_{k_2}^2)+\cdots+(a_1^kv_1^k+\cdots+a_{k_k}^kv_{k_k}^k)=0$$

اگر برای هر i قرار دهیم $v_i=a_1^iv_1^i+\cdots+a_{k_i}^iv_{k_i}^i$ آنگاه $v_i\in V_i$ و $v_1+\cdots+v_k=0$. بنابراین برای هر i، $v_i=0$ و چون β_i پایه‌ای برای V_i است، $a_1^i=\cdots=a_{k_i}^i=0$. در نتیجه همه ضرایب ترکیب خطی بالا صفر اند. این نشان می‌دهد $\beta_1,\ldots,\beta_k$ مستقل خطی است. اما واضح است که این مجموعه $V_1+\cdots+V_k$ را هم تولید می‌کند. بنابراین پایه‌ای برای آن است.

(۲) ⇐ (۳) ⇐ (۴) بدیهی است.

(۴) ⇐ (۵). فرض کنید $W_i=V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k$. در این صورت

$$V_1+\cdots+V_k=V_i+W_i.$$

بنابراین

$$\dim\ V_1+\cdots+V_k\ =\dim\ V_i\ +\dim\ W_i\ -\dim\ V_i\cap W_i$$

از آنجا که دنباله متشکل از پایه‌های V_jها $j\neq i$ مولدی برای W_i تشکیل می‌دهد (که فعلاً نمی‌دانیم آیا پایه است یا نه) خواهیم داشت

$$\dim\ W_i\ \le\dim V_1+\cdots+\dim V_{i-1}+\dim V_{i+1}+\cdots+\dim V_k$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \dim V_1 + \cdots + \dim V_k &= \dim \ V_1 + \cdots + V_k \\ &= \dim V_i + \dim W_i - \dim(V_i \cap W_i) \\ &\leq \ \dim V_1 + \cdots + \dim V_k \ - \dim \ V_i \cap W_i \end{aligned}$$

بنابراین $\dim \ V_i \cap W_i \ \leq 0$ و در نتیجه $V_i \cap W_i = \{0\}$.

(۵) ⇐ (۶). با نماد گزاری بالا،

$$V_i \cap \ V_1 + \cdots + V_{i-1} \ \subseteq V_i \cap W_i = \{0\}$$

(۶) ⇐ (۱). با استقرا روی i نشان می‌دهیم $V_1,\dots,V_i$ مستقل خطی اند. در حالت $i=1$، چیزی برای اثبات وجود ندارد! فرض کنید حکم برای iای درست باشد و $v_1 + \cdots + v_{i+1} = 0$ که در آن برای هر j، $v_j \in V_j$. در این صورت $v_1 + \cdots + v_i = -v_{i+1}$، بنابراین

$$v_1 + \cdots + v_i = -v_{i+1} \in \ V_1 + \cdots + V_i \ \cap V_{i+1} = \{0\}$$

در نتیجه $v_{i+1} = 0$ و $v_1 + \cdots + v_i = 0$. از آنجایی که $V_1,\dots,V_i$ مستقل خطی است، داریم $v_1 = \cdots = v_i = 0$. این نتیجه می‌دهد که $V_1,\dots,V_{i+1}$ نیز مستقل خطی است.

(۱) ⇐ (۷). فرض کنید $v_i, v_i' \in V_i$ و $v_1 + \cdots + v_k = v_1' + \cdots + v_k'$. در این صورت

$$(v_1 - v_1') + \cdots + (v_k - v_k') = 0$$

چون $v_i - v_i' \in V_i$ و $V_1,\dots,V_k$ مستقل خطی اند، از تساوی بالا نتیجه می‌شود که $v_1 - v_1' = \dots = v_k - v_k' = 0$. به عبارت دیگر برای هر i، $v_i = v_i'$.

(۷) ⇐ (۱). مستقل خطی بودن یعنی ۰ نمایش یکتا به صورت $v_1 + \cdots + v_k = 0$ دارد که برای هر i، $v_i \in V_i$.

مثال‌ها

قضیه‌ای به عنوان کاربرد.

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ آنگاه یک چند جمله‌ای یکتا با درجه کمتر از n وجود دارد که $p(x_i) = a_i$

حل. قرار دهید

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j) \,/\, (x_i - x_j)$$

به این ترتیب $f_i(x_j)$ اگر i مساوی با j باشد برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود. بنابراین $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n است (این فضا را با P^n نمایش می‌دهیم) که برای آن داریم

$$(a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(x_i) = a_1 f_1(x_i) + \cdots + a_n f_n(x_i) = a_i$$

با توجه به رابطه بالا تنها چندجمله‌ای به شکل $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n$ با خاصیت مورد نظر همان $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ است. پس برای اثبات یکتایی کافی است نشان دهیم هر چند جمله‌ای در P^n به صورت بالا است، یعنی $P^n = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. $\{f_1, \dots, f_n\}$ مستقل خطی است زیرا اگر $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n = 0$ در این صورت

$$0 = (t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)(x_i) = t_1 f_1(x_i) + \cdots + t_n f_n(x_i) = t_i$$

پس بعد P^n حداقل n است. از طرفی $P^n = \langle 1, x, x^2, ..., x^{n-1} \rangle$. در نتیجه بعد آن باید برابر n باشد و $\{f_1, ..., f_n\}$ و $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ دو پایه برای آن خواهند بود.

وجود پایه برای فضاهای برداری با تولید نامتناهی

قضیه ۱۲ وجود پایه را برای فضاهای برداری با تولید متناهی تضمین می‌کند. در این قسمت روش اثبات وجود پایه برای فضاهایی که با تولید متناهی نیستند توضیح داده خواهد شد. این روش مبتنی بر لم زرن است که صورت آن در ادامه بیان می‌شود. این لم یکی از معادل‌های اصل انتخاب است و توضیحات بیشتر راجع به آن را می‌توانید در کتاب‌های نظریه مجموعه‌ها یا مبانی ریاضی بیابید.

لم زرن

یک *ترتیب جزئی* روی مجموع $\mathcal{A}$ رابطه‌ای مانند $\subseteq$ بین اعضای $\mathcal{A}$ است که دارای خواص زیر باشد.

- برای هر $a \in \mathcal{A}$، $a \subseteq a$.
- اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq a$ آنگاه $a = b$.
- اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$ آنگاه $a \subseteq c$.

تفاوت یک ترتیب جزئی با یک ترتیب کلی در این است که هر دو عضو یک مجموعه مرتب کلی با هم قابل مقایسه اند در حالی که در مجموعه مرتب جزئی می‌تواند اعضایی باشند که با هم قابل مقایسه نیستند.

یک زیر مجموعه از یک مجموعه مرتب جزئی *زنجیر* نامیده می‌شود هرگاه هر دو عضو آن قابل مقایسه باشند. $a \in \mathcal{A}$ را یک کران بالا برای زیر مجموعه $S \subseteq \mathcal{A}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \subseteq a$. دقت کنید که کران بالای S لزومی ندارد داخل S باشد. یک عضو ماکزیمال عضوی از مجموعه مرتب جزئی است که هیچ عضوی بزرگتر از آن در مجموعه وجود نداشته باشد. توجه کنید که ممکن است اعضایی در مجموعه باشند که با عضو ماکزیمال قابل مقایسه نباشند ولی اگر عضوی با آن قابل مقایسه باشد در این صورت نمی‌تواند از آن بزرگتر باشد.

اگر $\mathcal{A}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد آنگاه $\mathcal{A}$ با رابطه شمول یک مجموعه مرتب جزئی است. یک زنجیر در آن دسته‌ای تو در تو از اعضای $\mathcal{A}$ است. اگر S_αها اعضایی از $\mathcal{A}$ باشند آنگاه یک کران بالا برای $\{S_\alpha\}$ عضوی از $\mathcal{A}$ است که شامل $\bigcup S_\alpha$ باشد. یک عضو ماکزیمال در $\mathcal{A}$ نیز عضوی در $\mathcal{A}$ است که داخل هیچ عضو دیگری از $\mathcal{A}$ قرار نداشته باشد.

لم زرن. اگر هر زنجیر در یک مجموعه مرتب جزئی دارای کران بالا باشد آنگاه آن مجموعه مرتب جزئی دارای عضو ماکزیمال است.

لم. اجتماع یک دسته تو در تو از مجموعه‌های مستقل خطی در یک فضای برداری خود یک مجموعه مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $\{S_\alpha\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های مستقل خطی در فضای برداری V باشد و $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k = 0$، که v_iها اعضایی از $\bigcup S_\alpha$ اند. در این صورت اندیس‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ وجود دارند که $v_i \in S_{\alpha_i}$. چون S_αها تو در تو اند در بین S_{α_i}ها یکی (مثلاً S_{α_1}) شامل بقیه است. به این ترتیب ترکیب خطی بالا یک ترکیب خطی از آعضای S_{α_1} است و چون این مجموعه مستقل خطی است همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشد. بنابراین $\bigcup S_\alpha$ یک مجموعه مستقل خطی است.

قضیه. هر فضای برداری داری پایه است.

اثبات. فرض کنید V یک فضای برداری و $S \subseteq V$ یک مجموعه مستقل خطی در آن است. اگر $\langle S \rangle = V$ آنگاه S یک پایه برای V خواهد بود. در غیر این صورت با اضافه کردن برداری از V که در $\langle S \rangle$ نیست به S، یک مجموعه مستقل خطی بزرگتری بدست می‌آید. بنابراین یک پایه یک مجموعه مستقل خطی در V است که در بین مجموعه‌های مستقل خطی ماکزیمال است. اما دسته مجموعه‌های مستقل خطی در V با رابطه شمول یک مجموعه مرتب جزئی است که طبق لم قبل هر زنجیر آن دارای کران بالا در این مجموعه است. در نتیجه بنا به لم زرن این مجموعه دارای یک عضو ماکزیمال است. این عضو ماکزیمال همان پایه فضای V است.

---

۳. نگاشت‌های خطی

مقدمه

شباهت بین مجموعه چند جمله‌ای‌ها به همراه جمع چند جمله‌ای‌ها و ضرب اسکالر در آنها با $\mathbb{R}^n$ و ساختار جبری آن موجب شد که در فصل پیش فضاهای برداری را به شکلی کلی تعریف کنیم به گونه‌ای که ویژگی‌های بیان شده در فصل اول برای $\mathbb{R}^n$ برای این فضاها نیز برقرار باشند. در اینجا دوباره به شباهت چند جمله‌ای‌ها و $\mathbb{R}^n$ توجه کرده و آن را به صورت دقیق‌تری مطالعه می‌کنیم.
هر چند جمله‌ای با درجه کمتر از n به شکل زیر است.

$$p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

بنابراین هر چندجمله‌ای کاملاً با n تایی مرتب $(a_1, \ldots, a_n)$ مشخص می‌شود. به این ترتیب یک نگاشت یک به یک و پوشا بین مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n و $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر وجود دارد.

$$p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad \leftrightarrow \quad (a_1, \ldots, a_n)$$

فرض کنید که $q(x)$ نیز یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n به صورت زیر باشد.

$$q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n \quad \leftrightarrow \quad (b_1, \ldots, b_n)$$

در این صورت $p(x) + q(x)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$p(x) + q(x) = (a_1 + b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n) \quad \leftrightarrow \quad (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

بنابراین با تناظر معرفی شده در بالا، جمع دو چند جمله‌ای متناظر با جمع بردارهای متناظر آن دو چند جمله‌ای است. به عبارت دیگر این تناظر ساختار جمع را روی این دو مجموعه حفظ می‌کند. این ویژگی برای ضرب اسکالر نیز برقرار است. یعنی اگر r یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $rp(x)$ متناظر است با r برابر بردار متناظر با $p(x)$.

$$rp(x) = ra_1x^{n-1} + ra_2x^{n-2} + \cdots + ra_{n-1}x + ra_n \quad \leftrightarrow \quad (ra_1, \ldots, ra_n)$$

بنابراین این تناظر ساختار ضرب اسکالر را نیز روی این دو مجموعه حفظ می‌کند. در نتیجه این دو مجموعه با ساختارهای جبریشان کاملاً شبیه هم و یکسان اند. به عبارت دیگر اگر ما دید خود را محدود به ساختار جبری جمع برداری و ضرب اسکالر موجود روی این دو مجموعه کنیم این دو مجموعه *یکسان* خواهند بود.
این *یکسانی* را می‌توانیم برای دو فضای برداری دلخواه نیز تعریف کنیم. دو فضای برداری V و W را یکسان می‌نامیم هرگاه تابع $T : V \to W$ وجود داشته باشد که

- یک به یک و پوشا باشد.
- ساختار جبری این دو فضای برداری را حفظ کند، یعنی برای هر دو بردار v و u در V و هر اسکالر r داشته باشیم

$$T(v + u) = T(v) + T(u) \qquad\qquad T(rv) = rT(v)$$

توجه کنید که لازم است V و W دو فضای برداری روی یک میدان باشند تا یکسانی معنی داشته باشد.
شرط اول به ساختار جبری روی فضاهای برداری ارتباطی ندارد در حالی که شرط دوم شرطی است که وابسته به این ساختار است. به همین دلیل این شرط از دیدگاه جبری شرطی مهم است و نگاشت‌هایی که در این شرط صدق می‌کنند دارای ویژگی‌های زیادی هستند. به همین

سبب بررسی یک به یک یا پوشا بودن این نوع نگاشت‌ها نیز ساده‌تر است. در این فصل به مطالعه این نوع نگاشت‌ها می‌پردازیم و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

نگاشت‌های خطی

تعریف. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. تابع $T:V\to W$ را یک نگاشت خطی از فضای V به فضای W می‌نامیم هرگاه برای هر دو بردار u و v در V و هر اسکالر r در F داشته باشیم

$$T(ru)=rT(u) \text{ و } T(u+v)=T(u)+T(v)$$

باید توجه شود که در روابط بالا u و v دو بردار در V و $T(u)$ و $T(v)$ دو بردار در W هستند. بنابراین جمع $u+v$ و ضرب ru طبق ساختار جبری V انجام می‌شوند و جمع $T(u)+T(v)$ و ضرب $rT(u)$ طبق ساختار جبری W انجام می‌شوند. ولی هر دو جمع و ضرب اسکالر را ما با یک نماد مشخص کرده‌ایم. در بعضی از متون برای متمایز کردن آنها روابط بالا را به صورت $T(u+_V v)=T(u)+_W T(v)$ و $T(r._V u)=r._W T(u)$ نمایش می‌دهند.

مثال.

نگاشت صفر. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. نگاشتی که هر برداری در V را به بردار صفر W می‌نگارد یک نگاشت خطی از V به W است که معمولاً به آن، *نگاشت صفر* می‌گوییم و آن را با ۰ نمایش می‌دهیم. باید دقت کنید که این صفر با صفر فضای V یا W متفاوت است و تنها نمادی برای نگاشت خطی صفر بین این دو فضای برداری است.
نگاشت همانی. برای هر فضای برداری V نگاشت همانی روی V یک نگاشت خطی از V به خود آن است. معمولاً این نگاشت را با I_V یا اگر اشتباهی پیش نیاید به صورت خلاصه با I نمایش می‌دهیم.

$$I_V:V\to V; \qquad \forall v\in V \quad I_V(v)=v$$

چند نکته.

۱. $T:V\to W$ یک نگاشت خطی از فضای V به فضای W است اگر و تنها اگر برای هر دو بردار u و v در V و هر اسکالر r در F داشته باشیم

$$T(u+rv)=T(u)+rT(v) \qquad (*)$$

اثبات. اگر T یک نگاشت خطی باشد آنگاه

$$T(u+rv)=T(u)+T(rv)=T(u)+rT(v)$$

برای اثبات عکس گزاره، با قرار دادن $r=۱$ در رابطه (*) خواهیم داشت

$$T(u+v)=T(u+۱.v)=T(u)+۱.T(v)=T(u)+T(v)$$

همچنین با قرار دادن u بجای v و $r-۱$ بجای r در رابطه (*) خواهیم داشت

$$T(ru)=T(u+(r-۱)u)=T(u)+(r-۱)T(u)=rT(u)$$

۲. فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی است. تصویر بردار صفر V توسط نگاشت T بردار صفر W است.

اثبات. $T(۰)=T(۰.v)=۰.T(v)=۰$.

۳. $T(-u)=T((-۱).u)=(-۱).T(u)=-T(u)$.

---

۴. فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی باشد. برای هر $v_1,\ldots,v_k\in V$ و $r_1,\ldots,r_k\in F$ داریم

$$T(r_1v_1+\cdots+r_kv_k)=r_1T(v_1)+\cdots+r_kT(v_k)$$

اثبات. با استقرا روی k.

با توجه به ویژگی بالا به سادگی نتیجه می‌شود که یک نگاشت خطی با مقادیرش روی یک پایه کاملاً مشخص می‌شود.

قضیه. فرض کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایه برای V و $w_1,\ldots w_n$ اعضایی دلخواه از W (نه لزوماً متمایز و یا ناصفر) باشند نگاشت خطی یکتای $T:V\to W$ وجود دارد که برای هر i داشته باشیم $T(v_i)=w_i$.

نکته. این گزاره برای فضاهای با بعد نامتناهی نیز درست است.

اثبات. فرض کنید v برداری دلخواه در V و T و U دو نگاشت خطی با شرایط بالا باشند. چون $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایه است v دارای نمایشی به شکل زیر است.

$$v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n$$

بنابراین

$$\begin{aligned}T(v)&=T(t_1v_1+\cdots+t_nv_n)=t_1T(v_1)+\cdots+t_nT(v_n)=t_1w_1+\cdots+t_nw_n\\&=t_1U(v_1)+\cdots+t_nU(v_n)=U(t_1v_1+\cdots+t_nv_n)=U(v)\end{aligned}$$

در نتیجه دو تابع T و U برابرند. این نشان می‌دهد که حداکثر یک نگاشت خطی با این ویژگی وجود دارد. برای اثبات وجود نیز از روش بالا استفاده می‌کنیم. چون $\{v_1,\ldots,v_n\}$ پایه‌ای برای V است هر عضو $v\in V$ برابر ترکیب خطی یکتا به شکل $v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n$ است. تابع $T:V\to W$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(v)=T(t_1v_1+\cdots+t_nv_n):=t_1w_1+\cdots+t_nw_n$$

این تابع یک نگاشت خطی از V به W است زیرا برای هر دو بردار دلخواه $v,u\in V$ داریم

$$v=t_1v_1+\cdots+t_nv_n \qquad u=s_1v_1+\cdots+s_nv_n$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}T(v+ru)&=T((t_1+rs_1)v_1+\cdots+(t_n+rs_n)v_n)\\&=(t_1+rs_1)w_1+\cdots+(t_n+rs_n)w_n\\&=(t_1w_1+\cdots+t_nw_n)+r(s_1w_1+\cdots+s_nw_n)=T(v)+rT(u)\end{aligned}$$

همچنین این تابع دارای ویژگی‌های ذکر شده در قضیه است زیرا

$$T(v_i)=T(0.v_1+\cdots+1.v_i+\cdots+0.v_n)=0.w_1+\cdots+1.w_i+\cdots+0.w_n=w_i$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی است و $T(u)=T(v)$. در این صورت داریم $T(u-v)=T(u)-T(v)=0$. حال اگر بدانیم که تنها برداری که توسط T به بردار صفر W نگاشته می‌شود بردار صفر V است آنگاه از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $u-v=0$ یا به عبارت دیگر باید داشته باشیم $u=v$. بنابراین یک به یک بودن T نتیجه می‌شود.

مجموعه بردارهایی که توسط T به صفر نگاشته می‌شوند را هسته یا پوچی T می‌نامند و آن را با $\ker T$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0\}$$

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه هسته T زیر فضایی از V است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که هسته یک نگاشت خطی ناتهی است زیرا طبق نکات بالا همیشه صفر V در این مجموعه است. برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = 0 + r.0 = 0$$

بنابراین هسته T یک زیر فضای برداری V است.

قضیه. نگاشت خطی $T : V \to W$ یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن زیر فضای بدیهی صفر باشد (یعنی $\ker T = \{0\}$).

اثبات. برای هر نگاشت خطی می‌دانیم $T(0) = 0$. اگر T یک به یک باشد آنگاه

$$v \in \ker T \quad \Rightarrow \quad T(v) = 0 = T(0) \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

اگر $\ker T = \{0\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) \quad &\Rightarrow \quad T(u - v) = T(u) - T(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u - v \in \ker T \\ &\Rightarrow \quad u - v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v. \end{aligned}$$

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت است و $T(u) = w$. در این صورت مجموعه همه بردارهایی که توسط T به بردار w نگاشته می‌شوند برابر است با انتقال هسته T با بردار u. به عبارت دیگر

$$T^{-1}(w) := \{v \in V : T(v) = w\} = u + \ker T$$

اثبات.

$$\begin{aligned} T(v) = w = T(u) \quad &\Leftrightarrow \quad T(v - u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - u \in \ker T \\ &\Leftrightarrow \quad v \in u + \ker T \end{aligned}$$

قضایای بالا نشان می‌دهند که هسته یک نگاشت خطی یعنی سطح تراز مقدار صفر (مجموعه بردارهایی که به صفر تصویر می‌شوند) یک فضای برداری است. سطوح تراز مقادیر دیگر یک نگاشت خطی نیز انتقال هسته آن هستند و در نتیجه از لحاظ بزرگی و شکل مانند یکدیگرند. بنابراین هرچه بُعد هسته یک نگاشت خطی کمتر باشد آن نگاشت خطی به نگاشتی یک به یک نزدیک‌تر است.

نگاشت‌های خطی پوشا

فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی باشد. طبق تعریف T پوشا است اگر مجموعه $\{T(v) : v \in V\}$ برابر W باشد. معمولاً این مجموعه را تصویر T می‌نامند و آن را با $\operatorname{Im} T$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) : v \in V\}$$

قضیه. تصویر هر نگاشت خطی $T : V \to W$ یک زیر فضای W است.

اثبات. واضح است که این مجموعه تهی نیست (زیرا V ناتهی است). فرض کنید w_1 و w_2 دو بردار دلخواه در $\operatorname{Im} T$ باشند. در این صورت بردارهای v_1 و v_2 در V وجود دارند که

$$T(v_1) = w_1 \qquad T(v_2) = w_2$$

بنابراین

$$w_1 + rw_2 = T(v_1) + rT(v_2) = T(v_1 + rv_2) \in \operatorname{Im} T$$

این نشان می‌دهد که $\operatorname{Im} T$ یک فضای برداری است.

با توجه به قضیه بالا تصویر یک نگاشت خطی یک فضای برداری است و هرچه بعد آن بیشتر باشد این نگاشت به نگاشتی پوشا شبیه‌تر می‌شود.

قضیه. اگر V با $v_1, \ldots, v_k$ تولید شود آنگاه $\operatorname{Im} T$ با $T(v_1), \ldots, T(v_k)$ تولید می‌شود. (این قضیه برای فضاهای با بعد نامتناهی نیز درست است.)

اثبات. با توجه به فرض قضیه $V = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k : t_i \in F\}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \{T(v) : v \in V\} \\ &= \{T(t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k) : t_i \in F\} \\ &= \{t_1 T(v_1) + \cdots + t_k T(v_k) : t_i \in F\} \\ &= \langle T(v_1), \ldots, T(v_k) \rangle \end{aligned}$$

بنابراین قضیه تصویر یک پایه توسط یک نگاشت خطی یک مولد برای تصویر آن نگاشت است. ولی این مولد ممکن است پایه برای تصویر آن نگاشت خطی نباشد. یک مثال ساده آن نگاشت خطی صفر است که همه بردارها را به صفر می‌نگارد. در ادامه روش بدست آوردن یک پایه برای تصویر یک نگاشت خطی بیان می‌شود.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_p\}$ یک پایه برای $\ker T$ و $\{v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_n\}$ گسترش آن به یک پایه V باشد. در این صورت $\{T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ است.

اثبات. طبق قضیه قبل $\{T(v_1), \ldots, T(v_p), \ldots, T(v_n)\}$ یک مولد برای $\operatorname{Im} T$ است. همچنین $T(v_1) = \cdots = T(v_p) = 0$ و درنتیجه با حذف کردن آنها از مجموعه بالا فضای تولید شده توسط مجموعه تغییر نمی‌کند. بنابراین $\{T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)\}$ یک مولد برای $\operatorname{Im} T$ است. تنها کافی است نشان دهیم این مجموعه مستقل خطی نیز است. فرض کنید ترکیبی خطی از آنها صفر شده باشد

$$\begin{aligned} a_{p+1} T(v_{p+1}) + \cdots + a_n T(v_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad T(a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker T \end{aligned}$$

چون $\{v_1, \ldots, v_p\}$ پایه‌ای برای $\ker T$ است داریم

$$a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p$$

و چون $\{v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است همه ضرایب بالا باید صفر باشند و مخصوصاً

$$a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$$

این نشان می‌دهد $\{T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n)\}$ مستقل خطی نیز است و در نتیجه یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ خواهد بود.

قضیه بُعد. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد آنگاه تصویر T نیز با بعد متناهی است و داریم

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

اثبات. نتیجه مستقیم قضیه بالا است.

خلاصه.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است.

۱. T یک به یک است $\Leftrightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker T) = 0$.

۲. T پوشا است $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$.

۳. اگر W با بعد متناهی باشد آنگاه

T پوشا است $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = \dim W$.

۴. اگر V و W با بعد متناهی باشند و $\dim V = \dim W$ آنگاه

T یک به یک است $\Leftrightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow$

$\dim(\ker T) = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = \dim W \Leftrightarrow$

$\operatorname{Im} T = W \Leftrightarrow$ T پوشا است

ویژگی‌های ۳ و ۴ برای فضاهای با بعد نامتناهی صحیح نیستند. سعی کنید مثال نقضی برای آن بسازید.

ساختار جبری نگاشت‌های خطی

جمع دو نگاشت و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت

با توجه به اینکه بردارها را در یک فضای برداری می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد، هر دو تابع از یک مجموعه به یک فضای برداری را نیز می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد.
فرض کنید W یک فضای برداری روی میدان F است و $T:S\to W$ و $U:S\to W$ دو تابع دلخواه باشند. جمع T و U تابعی از V به W است که عضو دلخواه $s\in S$ را به $T(s)+U(s)$ می‌نگارد. به عبارت دیگر

$$(T+U):S\to W;\qquad (T+U)(s):=T(s)+U(s)$$

ضرب اسکالر $r\in F$ در T تابعی از V به W است که عضو دلخواه $s\in S$ را به بردار $rT(s)$ می‌نگارد. به عبارت دیگر

$$(rT):S\to W;\qquad (rT)(s):=rT(s)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعه تابع‌های از S به W با این دو عمل خود یک فضای برداری است زیرا ویژگی‌های جمع و ضرب اسکالر روی فضای برداری W همگی به جمع و ضرب اسکالر روی توابع منتقل می‌شوند (خودتان این ویژگی‌ها را بررسی کنید).
به همین صورت اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند آنگاه نگاشت‌های خطی از V به W را نیز می‌توان با هم جمع کرد و یا در یک اسکالر ضرب کرد. نتیجه تابعی از V به W خواهد بود. قضیه زیر نشان می‌دهد که این تابع خود یک نگاشت خطی از V به W است.

قضیه. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F اند. جمع هر دو نگاشت خطی $T:V\to W$ و $U:V\to W$ خود یک نگاشت خطی از V به W است و حاصل ضرب هر اسکالر $r\in F$ در نگاشت خطی T نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات. برای هر دو بردار v و v' در V و هر اسکالر $t\in F$ داریم

$$\begin{aligned}(T+U)(v+tv') &= T(v+tv')+U(v+tv')\\ &= T(v)+tT(v')+U(v)+tU(v')\\ &= (T+U)(v)+t(T+U)(v')\end{aligned}$$

همچنین

$$(rT)(v+tv')=rT(v+tv')=r(T(v)+tT(v'))=(rT)(v)+t(rT)(v')$$

به این ترتیب مجموعه نگاشت‌های خطی از V به W با دو عمل بالا یک زیر فضای برداری در مجموعه توابع از V به W است. مجموعه نگاشت‌های خطی از V به W را معمولاً با $L(V,W)$ نمایش می‌دهند.

قضیه: اگر V و W دو فضای برداری با بعد متناهی روی F باشند آنگاه $L(V,W)$ نیز فضایی با بعد متناهی روی F است و $\dim(L(V,W))=\dim(V).\dim(W)$.

اثبات: فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V و $\{w_1,\dots,w_m\}$ یک پایه برای W باشند. برای هر $1\le i\le n$ و $1\le j\le m$، نگاشت خطی T_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T_{ij}(v_k)=\delta_{ik}w_j\qquad k=1,\dots,n$$

به عبارت دیگر

$$T_{ij}(v_1)=0,\dots,T_{ij}(v_i)=w_j,\dots,T_{ij}(v_n)=0.$$

توجه داشته باشید که برای هر $1\le k\le n$ داریم

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}T_{ij}\right](v_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}T_{ij}(v_k)$$
$$=a_{k1}T_{k1}(v_k)+\cdots+a_{km}T_{km}(v_k)=a_{k1}w_1+\cdots+a_{km}w_m \qquad (*)$$

با توجه به اینکه $\{w_1,\dots,w_m\}$ مستقل خطی است، اگر $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}T_{ij}=0$، آنگاه برای هر k، ضرایب $a_{k1},\dots,a_{km}$ باید برابر صفر باشند. بنابراین T_{ij} ها مستقل خطی اند.

فرض کنید $T:V\to W$ یک نگاشت خطی دلخواه باشد. برای هر $1\le k\le n$ داریم $T(v_k)\in W$، بنابراین ضرایب b_{ki} وجود دارند که

$$T(v_k)=b_{k1}w_1+\cdots+b_{km}w_m$$

با توجه به رابطه $(*)$ مقدار نگاشت خطی $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}T_{ij}$ نیز روی v_k برابر است با $b_{k1}w_1+\cdots+b_{km}w_m$. بنابراین مقدار این دو نگاشت خطی روی پایه $\{v_1,\dots,v_n\}$ یکسان است و درنتیجه این دو نگاشت باید با هم برابر باشند. این نشان می‌دهد که T_{ij} ها فضای $L(V,W)$ را نیز تولید می‌کنند و بنابراین پایه‌ای برای آن تشکیل می‌دهند. به این ترتیب

$$\dim L(V,W)=nm=\dim V.\dim W$$

ترکیب نگاشت‌ها

فرض کنید $T:V\to W$ و $U:W\to Z$ نگاشت‌هایی خطی بین فضاهای V، W و Z باشند. این دو نگاشت را می‌توان با هم ترکیب کرد و حاصل تابعی از V به Z خواهد بود. قضیه زیر نشان می‌دهد این ترکیب خود یک نگاشت خطی است.

قضیه. فرض کنید V، W و Z سه فضای برداری روی میدان F باشند و $T:V\to W$ و $U:W\to Z$ نگاشت‌هایی خطی بین آنها باشند. در این صورا $U\circ T:V\to Z$ نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات. برای هر دو بردار v و v' در V و هر اسکالر $t\in F$ داریم

$$U\circ T(v+tv')=U(T(v+tv'))=U(T(v)+tT(v'))$$
$$=U(T(v))+tU(T(v'))=U\circ T(v)+tU\circ T(v')$$

معمولاً $U\circ T$ را به صورت خلاصه با UT نمایش می‌دهیم. بنابراین $UT(v):=U(T(v))$.

اگر $T,U:V\to V$ دو عملگر روی فضای برداری V باشند آنگاه TU و UT هر دو تعریف می‌شوند و عملگرهایی روی فضای برداری V خواهند بود. به این ترتیب می‌توان اعضای $L(V,V)$ را با هم نیز ترکیب کرد و نتیجه باز عضوی از این فضا خواهد بود. به این ترتیب $L(V,V)$ دارای یک عمل جدید است که با جمع و ضرب اسکالر آن متفاوت است. در فصل‌های آینده این ساختار را بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف: نگاشت خطی از یک فضای برداری به خود آن فضا عملگر خطی روی آن فضای برداری نامیده می‌شود.

گزاره. اگر بعد V متناهی باشد، یک عملگر خطی روی آن یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

تمرین. نشان دهید هر فضای برداری با بعد نامتناهی دارای عملگرهایی است که یک به یک هستند اما پوشا نیستند. همچنین دارای عملگرهایی است که پوشا هستند اما یک به یک نیستند.

نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. می‌دانیم تابع $f : A \to B$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد. به عبارت دیگر f وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک بین اعضای A و B ایجاد کند.
نگاشت خطی یک به یک و پوشا نیز به عنوان یک تابع دارای وارون است. قضیه زیر نشان می‌دهد که وارون آن خود یک نگاشت خطی است.

قضیه: فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا است. در این صورت $T^{-1} : W \to V$ نیز یک نگاشت خطی است.

اثبات: فرض کنید $w_1, w_2 \in W$ اعضایی دلخواه باشند و $v_1 = T^{-1}(w_1)$ و $v_2 = T^{-1}(w_2)$. با توجه به اینکه T خطی است داریم

$$T(v_1 + rv_2) = T(v_1) + rT(v_2) = w_1 + rw_2$$

در نتیجه

$$T^{-1}(w_1 + rw_2) = v_1 + rv_2 = T^{-1}(w_1) + rT^{-1}(w_2)$$

بنابراین نگاشت $T^{-1} : W \to V$ یک نگاشت خطی است.
معمولا به نگاشت خطی وارون‌پذیر $T : V \to W$ *یکریختی* یا *یکسانی* می‌گویند و در این حالت دو فضای V و W را *یکریخت* یا *یکسان* می‌نامند. زیرا T یک تناظر یک به یک بین V و W ایجاد می‌کند که حافظ ساختار جبری روی آنهاست.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند

۱. T وارون‌پذیر است.

۲. T یک به یک و پوشاست.

۳. تصویر هر پایه V توسط T یک پایه برای W است.

۴. یک پایه برای V وجود دارد که نصویرآن توسط T یک پایه W است.

۵. نگاشت‌های خطی $U_1, U_2 : W \to V$ وجود دارند که $TU_1 = I_W$ و $U_2 T = I_V$.

اثبات: (برای حالت با بعد متناهی)
(۲) ← (۱). بنا به تعریف.
(۳) ← (۲). فرض کنید $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه دلخواه برای V باشد. چون T یک به یک است، مجموعه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} T$ تشکیل می‌دهد. از آنجایی که T پوشاست، $\operatorname{Im} T = W$ و در نتیجه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای W است.
(۴) ← (۳). واضح است.
(۵) ← (۴). فرض کنید تصویر پایه $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای V پایه‌ای برای W است.
قرار می‌دهیم $u_1 = T(v_1), \dots, u_n = T(v_n)$. بنابراین $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ پایه‌ای برای W است. نگاشت خطی یکتای $U : W \to V$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $U(u_i) = v_i$.
نگاشت‌های $UT : V \to V$ و $TU : W \to W$ نگاشت‌هایی خطی خواهند بود که به ترتیب روی پایه‌ای از V و پایه‌ای از W همانی هستند. در نتیجه $UT = I_V$ و $TU = I_W$.
(۱) ← (۵). اگر $T(v_1) = T(v_2)$، آنگاه

$$v_1 = U_2 T(v_1) = U_2(T(v_1)) = U_2(T(v_2)) = U_2 T(v_2) = v_2$$

بنابراین T یک به یک است. همچنین برای هر $w \in W$ داریم

$$T(U_1(w)) = TU_1(w) = I_W(w) = w$$

بنابر این T پوشاست.
می‌توانید خودتان این اثبات را برای حالت نامتناهی باز نویسی کنید.

قضیه: دو فضای برداری V و W روی یک میدان F یکریخت اند اگر و تنها اگر بعدهایشان برابر باشند.

اثبات. اگر $T : V \to W$ یکریختی بین V و W باشد آنگاه طبق قضیه قبل T یک تناظر یک به یک بین یک پایه V و یک پایه W خواهد بود. بنابراین بعدهای این دو فضای برداری با هم مساویند.
برعکس، اگر بُعدهای V و W برابر باشند آنگاه یک تناظر یک به یک بین یک پایه V و یک پایه W وجود دارد. این تناظر نگاشت خطی یکتای $T : V \to W$ را مشخص می‌کند که پایه‌ای از V را به پایه‌ای از W نگاشته است. بنابراین T یک تکریختی بین V و W است.
اثباتی برای حالت نامتناهی بیابید.

قضیه: فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی و برابر روی یک میدان F اند و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. گزاره‌های زیر معادل اند

- **T تکریختی بین V و W است.**
- **T یک به یک است.**
- **T پوشاست.**
- **نگاشت خطی $U : W \to V$ وجود دارد که $UT = I_V$**
- **نگاشت خطی $U : W \to V$ وجود دارد $TU = I_W$.**

اثبات: می‌دانیم تحت شرایط این قضیه نگاشت خطی T یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.
اگر T وارون‌پذیر باشد وارون آن در روابط گزاره‌های (۴) و (۵) صدق می‌کند. همچنین گزاره (۴) یک به یک بودن T را نتیجه می‌دهد و گزاره (۵) پوشا بودن T و در نتیجه اگر گزاره (۴) یا (۵) نیز درست باشد، T وارون‌پذیر است.

مختصات

با داشتن یک پایه مرتب مانند $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ برای فضای برداری V، هر عضو آن فضا کاملاً با n تایی مرتب از اعداد $t_1,\dots,t_n \in F$ به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$$

به این عددها مختصات بردار v در پایه α می‌گویند و معمولاً آنها را در یک ستون به ترتیب قرار می‌دهند. به این ترتیب هر عضو $v \in V$ با یک عضو F^n متناظر می‌شود که به آن نمایش بردار v در پایه α می‌گویند و آن را با $[v]_\alpha$ نمایش می‌دهند

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in F^n$$

برای هر $v,v' \in V$ و هر $r \in F$ داریم

$$[v + rv']_\alpha = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

زیرا اگر

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n, \qquad v' = t'_1v_1 + \cdots + t'_nv_n$$

آنگاه

$$v + rv' = (t_1 + rt'_1)v_1 + \cdots + (t_n + rt'_n)v_n$$

فرض کنید $V = F^n$. پایه استاندارد روی این فضا یک پایه ویژه و مشخص برای این فضا است. نمایش یک بردار در این پایه همان نمایش طبیعی آن است که به نمایش استاندارد آن بردار معروف است. بنابراین برای هر $X \in F^n$ داریم $[X]_{\varepsilon_n} = X$.

حال فرض کنید V و W دو فضای برداری و $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ و $\beta = \{w_1,\dots,w_m\}$ به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای آنها باشند. می‌دانیم هر نگاشت خطی $T : V \to W$ با مقادیرش روی پایه α به صورت یکتا مشخص می‌شود. یعنی با مشخص بودن بردارهای $T(v_1),\dots,T(v_n)$، نگاشت T کاملاً مشخص می‌شود. این بردارها نیز به کمک مختصات‌هایشان در پایه β کاملاً مشخص می‌شوند. در نتیجه نگاشت T با n ستون $[T(v_1)]_\beta,\dots,[T(v_n)]_\beta$ کاملاً مشخص می‌شود. از کنار هم قرار دادن این ستون‌ها یک آرایه دو بعدی از اعداد در F بدست می‌آید که به آن نمایش نگاشت T در پایه‌های α و β می‌گوییم و آن را با $[T]^\alpha_\beta$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر

$$T(v_j) = b^1_jw_1 + \cdots + b^m_jw_m$$

آنگاه

$$[T]^\alpha_\beta = \Big[[T(v_1)]_\beta \mid \dots \mid [T(v_n)]_\beta\Big] = \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^m_1 & \dots & b^m_n \end{pmatrix}$$

تعریف. به آرایه دو بعدی از اعداد میدان F *ماتریس* می‌گوییم. درایه سطر iام و ستون jام آن را معمولاً با a_{ij} یا $(A)_{ij}$ نشان می‌دهیم و اگر اشتباهی صورت نگیرد گاهی آن را به اختصار با A_{ij} نیز نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad : \quad A_{ij} = (A)_{ij} = a_{ij}$$

به این ترتیب با مشخص بودن پایه‌های α و β هر نگاشت خطی با یک ماتریس $m \times n$ مشخص می‌شود و هر ماتریس $m \times n$ یک نگاشت خطی را معرفی می‌کند. در نتیجه یک تناظر یک به یک بین نگاشت‌های خطی از V به W و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود. توجه داشته باشید که با تغییر پایه‌های α و β این تناظر نیز تغییر می‌کند، یعنی ماتریس متناظر با یک نگاشت خطی ممکن است عوض شود.

مثال

فرض کنید α و β پایه‌هایی دلخواه برای V و W، و $U : V \to W$ نگاشت خطی صفر باشد. یعنی برای هر $v \in V$ داریم $U(v) = 0$. در این صورت نمایش نگاشت U در پایه‌های α و β ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر است. به این ماتریس، *ماتریس صفر* می‌گوییم و آن را با 0 نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که نمایش نگاشت صفر همیشه صفر است و این نمایش به انتخاب پایه‌ها وابسته نیست.

فرض کنید $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای دلخواه برای فضای برداری V و I_V عملگر همانی روی این فضا باشد آنگاه برای هر i

$$I_V(v_i) = v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

بنابراین

$$[I_V]_\alpha^\alpha = \left[[I_V(v_1)]_\alpha \mid \cdots \mid [I_V(v_n)]_\alpha \right] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب نمایش عملگر همانی در هر پایه‌ای ماتریسی $n \times n$ می‌شود که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ و بقیه درایه‌هایش صفر است. به این ماتریس، *ماتریس همانی* می‌گوییم و آن را با I_n و یا اگر اشتباهی پیش نیاید با I نمایش می‌دهیم.

$$(I)_{ij} = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

توجه کنید نمایش عملگر همانی زمانی ماتریس همانی است که پایه‌های مبدأ و مقصد یکی باشند. اگر β پایه دیگری برای V باشد در این صورت $[I_V]_\beta^\alpha$ ماتریس همانی نخواهد بود.

قضیه: فرض کنید $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ پایه‌های مرتبی برای V و W و $T, U : V \to W$ دو نگاشت خطی از V به W باشند. درایه ijام ماتریس نمایش $T + U$ در پایه‌های α, β برابر است با جمع درایه‌های ijام ماتریس‌های نمایش T و U در پایه‌های α, β. همچنین درایه ijام ماتریس نمایش rT در پایه α, β برابر است با حاصل ضرب r در درایه ijام ماتریس نمایش T در پایه‌های α, β. به عبارت دیگر برای هر i و j

$$\left([T+U]_\beta^\alpha\right)_{ij} = \left([T]_\beta^\alpha\right)_{ij} + \left([U]_\beta^\alpha\right)_{ij} \qquad \left([rT]_\beta^\alpha\right)_{ij} = r\left([T]_\beta^\alpha\right)_{ij}$$

اثبات. ستون jام ماتریس نمایش نگاشت‌های خطی T, U و $T + U$ و rT به ترتیب برابر است با

$$[U(v_j)]_\beta \quad [T(v_j)]_\beta \quad [(T+U)(v_j)]_\beta \quad [(rT)(v_j)]_\beta$$

از طرفی داریم

$$[(T+U)(v_j)]_\beta = [T(v_j)+U(v_j)]_\beta = [T(v_j)]_\beta + [U(v_j)]_\beta$$
$$[(rT)(v_j)]_\beta = [rT(v_j)]_\beta = r[T(v_j)]_\beta$$

با توجه به قضیه بالا می‌توانیم جمع بین ماتریس‌های هم بعد را تعریف کنیم. همچنین می‌توانیم ضرب یک اسکالر را نیز در یک ماتریس تعریف کنیم. اگر A و B دو ماتریس $m\times n$ تایی باشند آنگاه $A+B$ و rA نیز ماتریسهای $m\times n$ تایی اند که برای آنها داریم

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$
$$(rA)_{ij} = rA_{ij}$$

به راحتی می‌توان نشان داد مجموعه ماتریس‌های $m\times n$ تایی روی میدان F با دو عمل جمع ماتریسی و ضرب اسکالر که در بالا معرفی شدند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است که معمولاً آن را با $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ نمایش می‌دهند.

با داشتن نمایش یک بردار $v\in V$ در پایه α و نمایش نگاشت خطی $T:V\to W$ در پایه‌های α و β می‌توانیم نمایش بردار $T(v)$ را در پایه β بدست آوریم. اگر

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$$

آنگاه

$$[T(v)]_\beta = [t_1T(v_1)+\cdots t_nT(v_n)]_\beta = t_1[T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n[T(v_n)]_\beta$$

رابطه نمایش $T(v)$ در پایه β را به نمایش v در پایه α و نمایش T در پایه‌های α و β می‌توان به صورت نمادین به شکل زیر بیان کرد.

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha[v]_\alpha$$

در بالا ماتریس $m\times n$ تایی $[T]_\beta^\alpha$ روی ستون n تایی $[v]_\alpha$ اثر می‌کند و حاصل ستون m تایی $[T(v)]_\alpha$ می‌شود. به این ترتیب می‌توانیم حاصل اثر یا ضرب یک ماتریس را در یک ستون تعریف کنیم. اگر $A=[A_1\mid\cdots\mid A_n]$ یک ماتریس $m\times n$ تایی با ستون‌های $A_1,\ldots,A_n$ و B یک ستون n تایی با درایه‌های $b_1,\ldots,b_n$ باشد، منظور از *ضرب ماتریس* A *در ستون* B، ستون m تایی زیر است.

$$AB = [A_1\mid\cdots\mid A_n]\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n$$

در واقع درایه iام ستون بالا برابر است با $a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n$.
فرض کنید V و W به ترتیب F^n و F^m اند. پایه استاندارد روی این فضاها پایه‌ای مشخص برای آنها است. نمایش یک نگاشت خطی از F^n به F^m در پایه‌های استاندارد این دو فضا *نمایش استاندارد* این نگاشت نامیده می‌شود. بنابراین هر ماتریس $A\in M_{m\times n}(F)$ متناظر با یک نگاشت خطی $L:F^n\to F^m$ است که نمایش استاندارد L برابر ماتریس A است. از این به بعد این نگاشت خطی را با L_A نمایش می‌دهیم. به این ترتیب $[L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}=A$. با توجه به اینکه برای هر $X\in F^n$ داریم $[X]_{\varepsilon_n}=X$ اثر L_A روی بردار X به صورت زیر است.

$$L_A(X) = [L_A(X)]_{e_m} = [L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}[X]_{\varepsilon_n} = AX$$

به صورت مشابه می‌توان رابطه نمایش ترکیب دو نگاشت خطی را با نمایش‌های آن دو نگاشت بدست آورد. فرض کنید $\alpha = \{v_۱,\dots,v_n\}$ و $\beta = \{w_۱,\dots,w_m\}$ و $\gamma = \{z_۱,\dots z_p\}$ پایه‌هایی مرتب برای فضاهای برداری V و W و Z و $T : V \to W$ و $Q : W \to Z$ دو نگاشت خطی بین این فضاها باشند. از آنجا که ماتریس‌های $[T]_\beta^\alpha$ و $[Q]_\gamma^\beta$ نگاشت‌های T و Q را کاملاً مشخص می‌کنند، با داشتن آنها نگاشت QT و نمایش آن نیز مشخص خواهد شد. رابطه نمایش $[QT]_\gamma^\alpha$ با $[T]_\beta^\alpha$ و $[Q]_\gamma^\beta$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}[QT]_\gamma^\alpha &= \left[[(QT)(v_۱)]_\gamma \mid \cdots \mid [(QT)(v_n)]_\gamma\right] \\ &= \left[[Q(T(v_۱))]_\gamma \mid \cdots \mid [Q(T(v_n))]_\gamma\right] \\ &= \left[[Q]_\gamma^\beta[T(v_۱)]_\beta \mid \cdots \mid [Q]_\gamma^\beta[T(v_n)]_\beta\right]\end{aligned}$$

اگر $[Q]_\gamma^\beta$ را به صورت نمادین از رابطه بالا فاکتور بگیریم خواهیم داشت

$$[QT]_\gamma^\alpha = [Q]_\gamma^\beta\left[\left[T(v_۱)\right]_\beta \mid \cdots \mid \left[T(v_n)\right]_\beta\right] = [Q]_\gamma^\beta[T]_\beta^\alpha$$

به این ترتیب می‌توان ضرب دو ماتریس را نیز به صورت طبیعی به شکل زیر تعریف کرد.

تعریف: فرض کنید $A = [A_۱ \mid \cdots \mid A_m]$ یک ماتریس $p \times m$ تایی و $B = [B_۱ \mid \cdots \mid B_n]$ یک ماتریس $m \times n$ تایی باشد. *ضرب ماتریس A در ماتریس B*، ماتریس $p \times n$ تایی C است که برای آن داریم

$$C = AB = A[B_۱ \mid \cdots \mid B_n] := \left[AB_۱ \mid \cdots \mid AB_n\right]$$

در بالا ضرب ماتریس $p \times m$ تایی A در یک ستون m تایی با درایه‌های $b_۱,\dots,b_m$ همان گونه که پیش از این بیان شد برابر است با

$$b_۱A_۱ + \cdots + b_mA_m$$

به عبارت دیگر ماتریس AB ماتریس $p \times n$ تایی C است که درایه ij ام آن برابر است با

$$(C)_{ij} = (A)_{i۱}(B)_{۱j} + \cdots + (A)_{im}(B)_{mj}$$

قضیه: ضرب ماتریس‌ها شرکت پذیر است. یعنی اگر A و B و C به ترتیب ماتریس‌های $p \times m$ و $m \times n$ و $n \times q$ تایی باشند آنگاه $(AB)C = A(BC)$.

اثبات: این رابطه را می‌توان به راحتی به کمک تعریف ضرب ماتریس‌ها تحقیق کرد و نشان داد درایه ij ام دو طرف برابر است با $\sum_{k=۱}^{m}\sum_{l=۱}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$. همچنین می‌توان با توجه به منشأ تعریف ضرب ماتریس‌ها این رابطه را ثابت کرد. اگر A و B و C به ترتیب ماتریس‌های نمایش نگاشت‌های خطی $T : F^m \to F^p$ و $Q : F^n \to F^m$ و $P : F^q \to F^n$ باشند آنگاه سمت چپ ماتریس نمایش نگاشت $(TQ)P$ است و سمت راست نمایش نگاشت $T(QP)$. ولی این دو نگاشت برابرند زیرا ترکیب توابع شرکت پذیر است.

دقت داشته باشید که ضرب دو ماتریس لزوماً جابجا نمی‌شود، زیرا ترکیب دو نگاشت خطی لزوماً جابجا نمی‌شود!

مثال

اگر A یک ماتریس $m \times n$ تایی باشد آنگاه $I_mA = AI_n = A$.

این رابطه را می‌توان به راحتی با توجه به قوانین ضرب ماتریس‌ها بررسی کرد.

$$(AI_n)_{ij} = \sum_k (A)_{ik}(I_n)_{kj} = (A)_{ij}(I_n)_{jj} = (A)_{ij}$$
$$(I_mA)_{ij} = \sum_k (I_m)_{ik}(A)_{kj} = (I_m)_{ii}(A)_{ij} = (A)_{ij}$$

این رابطه با توجه به اینکه ماتریس‌ها نمایش‌های نگاشت‌های خطی اند نیز به سادگی نتیجه می‌شود
اگر A نمایش نگاشت خطی $T : V \to W$ در پایه‌های α و β باشد آنگاه

$$A = [T]^\alpha_\beta = [TI_V]^\alpha_\beta = [T]^\alpha_\beta [I_V]^\alpha_\alpha = AI_n$$
$$A = [T]^\alpha_\beta = [I_WT]^\alpha_\beta = [I_V]^\beta_\beta [T]^\alpha_\beta = I_mA$$

ماتریس A را *وارون‌پذیر* گوییم هرگاه نمایش یک نگاشت خطی وارون‌پذیر باشد.

قضیه: گزاره‌های زیر معادل اند.

- **A وارون‌پذیر است.**
- **ماتریس‌های B و C وجود دارند که AB و CA تعریف شده اند و برابر ماتریس همانی هستند. به عبارت دیگر $AB = I_m$ و $CA = I_n$.**
- **A مربعی است و ماتریس B وجود دارد به گونه‌ای که AB ماتریس همانی است. (وارون راست)**
- **A مربعی است و ماتریس C وجود دارد به گونه‌ای که CA ماتریس همانی است. (وارون چپ)**
- **A مربعی است و تنها جواب معادله همگن $AX = ۰$ جواب بدیهی $X = ۰$ است.**
- **A مربعی است و برای هر $Y \in F^n$، $X \in F^n$ ای وجود دارد که $AX = Y$.**

اثبات: این قضیه بیان ماتریسی قضیه‌های مربوط به وارون نگاشت‌های خطی است.

نتیجه: اگر A وارون‌پذیر باشد، A مربعی است و ماتریس یکتای B وجود دارد که $AB = I_n$ و $BA = I_n$. به ماتریس B *وارون ماتریس* A می‌گوییم.

اثبات: این گزاره برای نگاشت‌های خطی واضح است. یعنی وارون یک نگاشت خطی یکتا است. اما اثباتی به کمک ویژگی‌های ماتریس‌ها نیز ارائه می‌کنیم. اگر $AB = I$ و $CA = I$ آنگاه

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

نتیجه. اگر نمایش یک نگاشت خطی ماتریسی وارون‌پذیر باشد آنگاه خود آن نگاشت نیز وارون‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید نمایش نگاشت خطی $T : V \to W$ در پایه‌های α و β ماتریس وارون‌پذیر A است. بنابر قضیه قبل A مربعی است و ماتریس مربعی B وجود دارد که $BA = I$. در نتیجه فضاهای V و W هم بعد اند و نگاشت خطی یکتای $U : W \to V$ وجود دارد که نمایش آن در پایه‌های β و α برابر ماتریس B است. به این ترتیب

$$[UT]^\alpha_\alpha = [U]^\beta_\alpha [T]^\alpha_\beta = BA = I$$

این نشان می‌دهد که $UT = I_V$ و چون V و W هم بعد اند T نگاشتی وارون‌پذیر است.
طبق تعریف یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ نمایش نگاشتی وارون‌پذیر روی یک فضای برداری n بعدی در پایه‌های مناسب است. با عوض شدن پایه‌ها، ماتریس نمایش نیز عوض می‌شود. به این صورت ماتریس‌های وارون‌پذیر متفاوتی به دست می‌آید. در زیر نشان می‌دهیم که همه ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ در این فرایند ظاهر می‌شوند. به عبارت دیگر هر ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ نمایش آن نگاشت خطی در پایه‌های مناسب است. برای این کار نشان می‌دهیم که هر ماتریس وارون‌پذیر نمایش نگاشت همانی در پایه‌های مناسب است.

قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و α و α' دو پایه برای آن باشند، آنگاه $[I_V]^\alpha_{\alpha'}$ یک ماتریس وارون‌پذیر است. اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ تایی باشد، آنگاه پایه‌های β و β' برای V وجود دارند که $A = [I_V]^\alpha_\beta$ و $A = [I_V]^{\beta'}_{\alpha'}$.

اثبات: از آنجایی که نگاشت همانی وارون‌پذیر است هر نمایش آن نیز طبق تعریف وارون‌پذیر خواهد بود. در واقع داریم

$$[I_V]_{\alpha}^{\alpha'}[I_V]_{\alpha'}^{\alpha} = [I_V I_V]_{\alpha}^{\alpha} = [I_V]_{\alpha}^{\alpha} = I$$

در نتیجه $[I_V]_{\alpha'}^{\alpha}$ وارون‌پذیر است و وارون آن ماتریس $[I_V]_{\alpha}^{\alpha'}$ است.

فرض کنید A یک ماتریس وارون‌پذیر است و $T : V \to V$ عملگر یکتایی است که $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}$. چون A وارون‌پذیر است، عملگر T نیز وارون‌پذیر است. در نتیجه

$$u_۱ = T(v_۱),\dots,u_n = T(v_n)$$

یک پایه برای V خواهد بود که آن را با β نمایش می‌دهیم. در این صورت

$$A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \left[[T(v_۱)]_{\alpha} \mid \cdots \mid [T(v_n)]_{\alpha}\right] = \left[[u_۱]_{\alpha} \mid \cdots \mid [u_n]_{\alpha}\right] = [I_V]_{\alpha}^{\beta}$$

اگر در روند بالا به جای ماتریس A و پایه α، $A^{-۱}$ و α' را قرار دهیم، پایه β' به گونه‌ای به دست می‌آید که $A^{-۱} = [I_V]_{\alpha'}^{\beta'}$. بنابراین $A = [I_V]_{\beta'}^{\alpha'}$.

تغییر مختصات

فرض کنید $\alpha = \{v_۱,\dots,v_n\}$ و $\alpha' = \{v'_۱,\dots,v'_n\}$ دو پایه برای V باشند و

$$v = t_۱v_۱ + \cdots + t_nv_n$$

آنگاه

$$\begin{aligned}[v]_{\alpha'} &= [t_۱v_۱ + \cdots + t_nv_n]_{\alpha'} = t_۱[v_۱]_{\alpha'} + \cdots + t_n[v_n]_{\alpha'} \\ &= \left[[v_۱]_{\alpha'} \mid \cdots \mid [v_n]_{\alpha'}\right]\begin{bmatrix} t_۱ \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = P[v]_{\alpha}\end{aligned}$$

یعنی با ضرب کردن ماتریس P در نمایش بردار v در پایه α، نمایش این بردار در پایه α' بدست می‌آید. ستون‌های P نمایش اعضای پایه α در پایه α' اند. در واقع ماتریس P را می‌توان به عنوان ماتریس نمایش عملگر همانی $I : V \to V$ در پایه‌های α و α' در نظر گرفت. بنابراین

$$\begin{aligned}[v]_{\alpha'} &= [I]_{\alpha'}^{\alpha}[v]_{\alpha} = P[v]_{\alpha} \\ [v]_{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\alpha'}[v]_{\alpha'} = Q[v]_{\alpha'}\end{aligned}$$

دقت کنید که ماتریس‌های P و Q وارون هم اند زیرا

$$\begin{aligned}P.Q &= [I]_{\alpha'}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'} = [I.I]_{\alpha'}^{\alpha'} = [I]_{\alpha'}^{\alpha'} = I \\ Q.P &= [I]_{\alpha}^{\alpha'}[I]_{\alpha'}^{\alpha} = [I.I]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha} = I\end{aligned}$$

به همین شکل می‌توان رابطه دو نمایش یک نگاشت خطی را در پایه‌های مختلف بدست آورد. فرض کنید α و α' دو پایه برای V و β و β' دو پایه برای W و $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. ماتریس‌های تغییر مختصات P و Q وجود دارند که

$$[v]_{\alpha'} = P[v]_{\alpha} \qquad [w]_{\beta'} = Q[w]_{\beta}$$

بنابراین برای هر v

$$\begin{aligned}
&[T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\alpha'}[v]_{\alpha'} \\
&\Rightarrow Q[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta'}^{\alpha'}P[v]_{\alpha} \\
&\Rightarrow [T(v)]_{\beta} = Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\alpha'}P[v]_{\alpha} = [T]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha}
\end{aligned}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\alpha'}P = [T]_{\beta}^{\alpha}$. در واقع این رابطه به سادگی از نمایش ترکیب نگاشت‌های خطی نیز بدست می‌آید:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = [I_W T I_V]_{\beta}^{\alpha} = [I_W]_{\beta}^{\beta'}[T]_{\beta'}^{\alpha'}[I_V]_{\alpha'}^{\alpha}$$

با توجه به مطالب بالا $[I_V]_{\alpha'}^{\alpha}$ ماتریس تغییر مختصات از پایه α به پایه α' و $[I_W]_{\beta}^{\beta'}$ نیز ماتریس تغییر مختصات از پایه β' به پایه β است که وارون ماتریس تغییر مختصات از پایه β به پایه β' می‌باشد.

نگاشت‌های خطی خاص

نگاشت‌های تصویر

فرض کنید فضای برداری V برابر جمع مستقیم دو زیرفضای V_1 و V_2 است. بنابراین هر عضو $v \in V$ نمایشی یکتا به صورت $v = v_1 + v_2$ دارد که $v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$. به این ترتیب می‌توانیم به هر عضو $v \in V$، مولفه اول یعنی v_1 را نسبت دهیم و این نگاشت خوش تعریف است.

$$T : V \to V; \qquad T(v) = v_1$$

نشان می‌دهیم این نگاشت یک نگاشت خطی است که به آن *تصویر* گویند. در واقع این نگاشت فضای V را در راستای زیر فضای V_2 روی زیر فضای V_1 تصویر می‌کند.
فرض کنید v و u دو بردار دلخواه در V و $v = v_1 + v_2$ و $u = u_1 + u_2$ نمایش آنها در تجزیه $V = V_1 \oplus V_2$ باشد. در این صورت

$$v + ru = (v_1 + ru_1) + (v_v + ru_2), \quad (v_1 + ru_1) \in V_1, \quad (v_v + ru_2) \in V_2$$

بنابراین

$$T(v + ru) = v_1 + ru_1 = T(v) + rT(u)$$

توجه کنید که $\operatorname{Im} T = V_1$ و $\ker T = V_2$ و $T |_{V_1} = I_{V_1}$. در نتیجه برای نگاشت تصویر T داریم $T^2 = T$.
در زیر نشان می‌دهیم این ویژگی‌های نگاشت تصویر را می‌توان در رابطه $T^2 = T$ خلاصه کرد.

قضیه. عملگر خطی $T : V \to V$ یک تصویر است اگر و تنها اگر $T^2 = T$.

اثبات. در بالا دیدیم که نگاشت‌های تصویر در این رابطه صدق می‌کنند. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $T : V \to V$ نگاشتی خطی است به گونه‌ای که $T^2 = T$. برای هر $v \in \operatorname{Im} T$ بردار $u \in V$ وجود دارد که $T(u) = v$. بنابراین $T(v) = T(T(u)) = T^2(u) = T(u) = v$. در نتیجه تحدید T به زیرفضای $\operatorname{Im} T$ عملگر همانی است. (به عبارت دیگر $T |_{\operatorname{Im} T} = I_{\operatorname{Im} T}$).
این نشان می‌دهد که دو زیر فضای $\ker T$ و $\operatorname{Im} T$ نمی‌توانند اشتراک نابدیهی داشته باشند. زیرا اگر v در اشتراک این دو زیرفضا باشد، $T(v)$ از آنجا که در هسته T است بردار 0 خواهد بود و از آنجا که در تصویر T است برابر با خود v است. بنابراین v باید صفر باشد. در نتیجه V برابر جمع مستقیم دو زیرفضای $\ker T$ و $\operatorname{Im} T$ است، زیرا طبق قضیه بعد داریم

$$\dim(\operatorname{Im} T + \ker T) = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = \dim V$$

بنابراین هر عضو V را می‌توان به صورت جمع عضوی از $\operatorname{Im}(T)$ و عضوی از $\ker(T)$ نوشت. فرض کنید $v = u + w$ که $w \in \ker T$ و $u \in \operatorname{Im} T$. در این صورت

$$T(v) \; = T(u) + T(w) = \; u + 0 \; = u$$

در تجزیه $V = V_1 \oplus V_2$ فرض کنید T_1 و T_2 به ترتیب تصویر روی مولفه اول و دوم باشند. در این صورت واضح است که $T_1 + T_2 = I$ و $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$. برعکس این حکم نیز برقرار است، یعنی اگر T_1 و T_2 دو نگاشت خطی باشند که $T_1 + T_2 = I$ و $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$ آنگاه $V = \operatorname{Im} T_1 \oplus \operatorname{Im} T_2$ و T_1 و T_2 تصویر روی مولفه اول و دوم هستند. قضیه زیر این موضوع را به صورت کلی‌تر نشان می‌دهد.

قضیه. فرض کنید $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ و برای هر i، T_i عملگر تصویر روی مولفه iام باشد. در این صورت

- $T_1+\cdots+T_k=I$.
- برای هر $i\neq j$، $T_iT_j=0$.

برعکس، فرض کنید $T_1,\dots,T_k:V\to V$ عملگرهای با دو ویژگی بالا باشند. در این صورت $V=\operatorname{Im}T_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}T_k$ و T_iها تصویر روی مولفه iام اند.

اثبات. فرض کنید $v\in V$ برداری دلخواه و $v=v_1+\cdots+v_k$ نمایش آن در تجزیه $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ باشد. در این صورت برای هر i داریم $T_i(v)=v_i$. بنابراین

$$(T_1+\cdots+T_k)(v)=T_1(v)+\cdots+T_k(v)=v_1+\cdots+v_k=v$$

بنابراین $T_1+\cdots+T_k=I$. با توجه به اینکه نمایش هر $v_j\in V_j$ در تجزیه بالا به صورت $0+\cdots+v_j+\cdots+0$ است، برای هر $i\neq j$ داریم $T_i(v_j)=0$. به این ترتیب برای هر $v\in V$ داریم $T_iT_j(v)=T_i(v_j)=0$ و در نتیجه $T_iT_j=0$. برعکس، فرض کنید $T_1,\dots,T_k$ عملگرهای باشند که در دو شرط قضیه صدق می‌کنند. ابتدا توجه کنید که برای هر $v\in V$ داریم

$$v=I(v)=(T_1+\cdots+T_k)(v)=T_1(v)+\cdots+T_k(v)\in\operatorname{Im}T_1+\cdots+\operatorname{Im}T_k$$

بنابراین v نمایشی به صورت $v=v_1+\cdots+v_k$ دارد که در آن $v_i=T_i(v)\in\operatorname{Im}T_i$. نشان می‌دهیم این تنها نمایش v به این صورت است. فرض کنید $v=u_1+\cdots+u_k$ که در آن $u_i\in\operatorname{Im}T_i$. دقت کنید که شرط $T_iT_j=0$ نشان می‌دهد که $T_i\mid_{\operatorname{Im}T_j}=0$. همچنین این شرط به همراه شرط دوم نتیجه می‌دهد که T_iها عملگر تصویر اند، زیرا

$$\begin{aligned}T_i=T_iI=T_i(T_1+\cdots+T_k)&=T_iT_1+\cdots+T_iT_k\\&=0+\cdots+T_i^2+\cdots+0=T_i^2\end{aligned}$$

بنابراین $T_i\mid_{\operatorname{Im}T_i}=I_{\operatorname{Im}T_i}$ و در نتیجه

$$T_i(v)=T_i(u_1+\cdots+u_k)=T_i(u_1)+\cdots+T_i(u_k)=0+\cdots+T_i(u_i)+\cdots+0=u_i$$

اگر $\{v_1,\dots,v_s\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im}(T)$ و $\{w_1,\dots,w_{n-s}\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد آنگاه $\alpha=\{v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_{n-s}\}$ پایه‌ای برای V است و نمایش عملگر T در این پایه مرتب به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}[T]_\alpha^\alpha&=\big[[T(v_1)]_\alpha\mid\cdots\mid[T(v_s)]_\alpha\mid 0\mid\cdots\mid 0\big]\\&=\big[[v_1]_\alpha\mid\cdots\mid[v_s]_\alpha\mid 0\mid\cdots\mid 0\big]=\begin{bmatrix}I_s&0\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

عملگرهای پوچ‌توان

به عنوان مثال دیگر از عملگرهای مهم که رفتاری ساده دارند می‌توان به عملگرهایی مانند $T:V\to V$ اشاره کرد که در رابطه $T^2=0$ صدق می‌کنند. این ویژگی‌معادل این است که $\operatorname{Im}T\subset\ker T$ باشد. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im}T$ و $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_s\}$ گسترش آن به پایه‌ای برای $\ker T$ باشد. از آنجایی که $v_1,\dots,v_k$ در $\operatorname{Im}T$ قرار دارند بردارهای $u_1,\dots,u_k$ای وجود دارند که $T(u_i)=v_i$. توجه کنید که چون تصویر $u_1,\dots,u_k$ مستقل خطی است خود این بردارها نیز مستقل خطی اند و به علاوه در $\ker T$ نیز نیستند. در واقع نشان می‌دهیم که با اضافه کردن این بردارها به $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_s\}$ یک پایه برای V بدست می‌آید. توجه کنید که تعداد همه این بردارها برابر مجموع بعد $\operatorname{Im}T$ و $\ker T$ است که طبق قضیه بعد این مجموع نیز برابر بعد فضای V است. بنابراین تنها کافی است نشان دهیم که این بردارها مستقل خطی اند. فرض کنید

$$a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + b_1v_1 + \cdots + b_sv_s = 0$$

با اثر دادن نگاشت T روی رابطه بالا و توجه به اینکه $v_1,\dots,v_s$ در $\ker T$ قرار دارند، خواهیم داشت

$$0 = a_1T(u_1) + \cdots + a_kT(u_k) = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$$

از آنجا گه $v_1,\dots,v_s$ مستقل خطی اند همه ضرایب ترکیب خطی بالا باید صفر باشند. بنابراین رابطه اول به صورت زیر در می‌آید.

$$b_1v_1 + \cdots + b_sv_s = 0$$

دوباره با توجه به اینکه $v_1,\dots,v_s$ مستقل خطی اند همه ضرایب ترکیب خطی بالا نیز باید صفر باشند. این نشان می‌دهد که مجموعه $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s\}$ مستقل خطی و درنتیجه یک پایه برای V است. به این ترتیب V دارای پایه‌ای است که به صورت زیر با عملگر T ارتباط دارد.

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & \vdots & & \vdots\\
 & & v_s & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

نمایش عملگر T در پایه مرتب $\alpha = \{v_1,u_1,v_2,u_2,\dots,v_k,u_k,v_{k+1},\dots,v_s\}$ به صورت زیر است.

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

مشابه این مطالب برای عملگرهایی که در شرط $T^3 = 0$ صدق می‌کنند نیز برقرار است. توجه کنید گه تحدید نگاشت T به $\operatorname{Im} T$ نگاشتی از $\operatorname{Im} T$ به خود این فضا است. بنابراین تحدید T به $\operatorname{Im} T$ عملگری روی این فضا است که اگر با خودش ترکیب شود برابر صفر می‌شود. طبق مطالب بالا پایه‌ای برای $\operatorname{Im} T$ مانند $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_s\}$ وجود دارد که به صورت زیر با عملگر T ارتباط دارد.

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0\\
 & & \vdots & & \vdots\\
 & & v_s & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

تعداد این بردارها برابر بعد $\operatorname{Im} T$ است و چون همه آنها در این فضا قرار دارند بردارهای $w_1,\dots,w_s$ وجود دارند که

$$\begin{array}{ccccccc}
w_1 & \xrightarrow{T} & u_1 & \xrightarrow{T} & v_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
w_k & \xrightarrow{T} & u_k & \xrightarrow{T} & v_k & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & w_{k+1} & \xrightarrow{T} & v_{k+1} & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & w_s & \xrightarrow{T} & v_s & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

توجه کنید که $v_1,\dots,v_s$ در $\ker T$ قرار دارند، ولی ممکن است که کل این فضا را تولید نکنند. در این صورت این مجموعه مستقل خطی را نیز می‌توانیم با اضافه کردن بردارهایی مانند $w_{s+1},\dots,w_r$ به پایه‌ای برای $\ker T$ گسترش داد. دقت کنید که در این فرایند بردارهای $w_1,\dots,w_s,\dots,w_r$ به پایه $\operatorname{Im} T$ اضافه شدند که تعداد آنها برابر بعد $\ker T$ است. پس طبق قضیه بعد تعداد کل بردارها برابر بعد فضای V است. نشان می‌دهیم که این مجموعه مستقل خطی نیز است که این خود نتیجه می‌دهد که پایه‌ای برای V خواهد بود.

برای اثبات مستقل خطی بودن این مجموعه گزاره کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره. فرض کنید $T: V \to V$ عملگری دلخواه است. مجموعه زنجیرهایی به صورت

$$\begin{array}{ccccccc}
v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & & & \vdots & & \vdots \\
v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

مستقل خطی است اگر و تنها اگر مجموعه بردارهای انتهای این زنجیرها یعنی $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ مستقل خطی باشند.

اثبات. یک طرف حکم بالا که واضح است، زیرا مجموعه بردارهای انتهایی زیر مجموعه بردارهای زنجیرها است. اگر مجموعه بزرگ‌تر مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه کوچک‌تر نیز مستقل خطی است. برای اثبات طرف دیگر حکم از استقرا روی طول بزرگ‌ترین زنجیر استفاده می‌کنیم. اگر طول بزرگ‌ترین زنجیر یک باشد آنگاه همه بردارها انتهایی هستند و دیگر چیزی برای اثبات نمی‌ماند. فرض کنید حکم برای زمانی که طول بزرگ‌ترین زنجیر از s بیشتر نباشد برقرار است. زنجیرهایی به صورت

$$\begin{array}{ccccccccc}
v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & v^1_{s_1-1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & v^r_{s_r-1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0
\end{array}$$

را در نظر بگیرید که در آن $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ مستقل خطی و طول بزرگ‌ترین زنجیر s است. طبق فرض استقرا می‌دانیم مجموعه $\{v^1_1,\dots,v^1_{s_1-1},\dots,v^r_1,\dots,v^r_{s_r-1}\}$ مستقل خطی است.

فرض کنید

$$a^1_1 v^1_1 + a^1_2 v^1_2 + \cdots + a^1_{s_1} v^1_{s_1} + \cdots + a^r_1 v^r_1 + a^r_2 v^r_2 + \cdots + a^r_{s_r} v^r_{s_r} = 0$$

با اعمال T روی ترکیب خطی بالا خواهیم داشت

$$0 + a^1_2 v^1_1 + \cdots + a^1_{s_1} v^1_{s_1-1} + \cdots + 0 + a^r_2 v^r_1 + \cdots + a^r_{s_r} v^r_{s_r-1} = 0$$

با توجه به مستقل خطی بودن $\{v^1_1,\dots,v^1_{s_1-1},\dots,v^r_1,\dots,v^r_{s_r-1}\}$ نتیجه می‌شود که همه ضرایب $a^1_2,\dots,a^1_{s_1},\dots,a^r_2,\dots,a^r_{s_r}$ صفر اند. بنابراین ترکیب خطی اول به صورت $a^1_1 v^1_1 + \cdots + a^r_1 v^r_1 = 0$ خواهد بود که از مستقل خطی بودن $\{v^1_1,\dots,v^r_1\}$ نیز نتیجه می‌شود ضرایب $a^1_1,\dots,a^r_1$ نیز صفر اند.

به این ترتیب با کمک این گزاره ثابت می‌شود که برای هر عملگری که در رابطه $T^3 = 0$ صدق می‌کند پایه‌ای به صورت اجتماع چند زنجیر به طول حداکثر سه وجود دارد.

یک عملگر $T : V \to V$ را *پوچ‌توان* گوییم هرگاه عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $T^k = 0$. کوچک‌ترین k با این ویژگی را نیز *مرتبه آن عملگر* می‌نامیم.

قضیه. برای هر عملگر پوچ‌توان $T : V \to V$ پایه‌ای از زنجیرها برای V به صورت زیر وجود دارد.

$$\begin{array}{ccccccc} v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0 \end{array}$$

طول بزرگ‌ترین زنجیر برابر مرتبه T است. به این ترتیب نمایش T در پایه مرتب $\alpha = \{v^1_1, \ldots, v^1_{s_1}, \ldots, v^r_1, \ldots, v^r_{s_r}\}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix} \qquad\qquad J_i = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right\} s_i$$

اثبات. (استقرا روی مرتبه T). اگر مرتبه T یک باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ما این حکم را نیز برای عملگرهای پوچ‌توان مرتبه دو به صورت مستقل ثابت کردیم. فرض کنید حکم برای عملگرهای مرتبه کمتر از s برقرار باشد. همچنین فرض کنید T عملگری پوچ‌توان با مرتبه s است. تحدید T به $\operatorname{Im} T$ عملگری پوچ‌توان روی $\operatorname{Im} T$ با مرتبه $s - 1$ است. طبق فرض استقرا پایه‌ای از زنجیرها برای $\operatorname{Im} T$ به صورت زیر وجود دارد که در ضمن طول بزرگ‌ترین زنجیر برابر $s - 1$ است.

$$\begin{array}{ccccccc} v^1_{s_1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ v^r_{s_r} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0 \end{array}$$

چون این بردارها در $\operatorname{Im} T$ قرار دارند بردارهای $v^1_{s_1+1}, \ldots, v^r_{s_r+1}$ در V وجود دارند که $T(v^i_{s_i+1}) = v^i_{s_i}$. همچنین توجه داشته باشید که $v^1_1, \ldots, v^r_1$ مستقل خطی اند و در $\ker T$ قرار دارند. بنابراین می‌توان با اضافه کردن بردارهای $v^{r+1}_1, \ldots, v^l_1$ به آنها یک پایه برای $\ker T$ بدست آورد. به این ترتیب زنجیرهای

$$\begin{array}{ccccccc} v^1_{s_1+1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^1_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ v^r_{s_r+1} & \xrightarrow{T} & \cdots & \xrightarrow{T} & v^r_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\ & & & & v^{r+1}_1 & \xrightarrow{T} & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & v^l_1 & \xrightarrow{T} & 0 \end{array}$$

بدست می‌آیند که طول بزرگ‌ترین آنها برابر s است و تعداد بردارهای آن برابر مجموع بعد $\operatorname{Im} T$ و $\ker T$ است که این مقدار طبق قضیه بعد برابر بعد V است. از طرفی بردارهای انتهایی این زنجیرها پایه‌ای برای $\ker T$ و در نتیجه مستقل خطی اند. بنابراین طبق گزاره بالا این مجموعه این زنجیرها مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای V خواهد بود.

---

۴. تابعک‌های خطی و فضای دوگان

می‌دانیم که یک میدان، یک فضای برداری یک بعدی روی خودش نیز است. نگاشت‌های خطی از یک فضای برداری روی میدان F به میدان F را *تابعک خطی* می‌نامیم. بنابر این اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه تابعک‌های خطی روی V همان نگاشت‌های خطی به شکل $f:V\to F$ اند.

در این فصل به بررسی تابعک‌های خطی روی فضاهای با بعد متناهی می‌پردازیم. بنابراین در تمام طول این فصل فضاها با بعد متناهی هستند.

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F است. تصویر هر تابعک خطی ناصفر برابر کل F و هسته آن یک زیر فضای $n-1$ بعدی از V خواهد بود.

هر زیر فضای $n-1$ بعدی V نیز هسته یک تابعک خطی است. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ پایه‌ای برای آن زیر فضا و $\{v_1,\dots,v_{n-1},v_n\}$ گسترشی از آن به پایه‌ای برای V باشد.

تابعک خطی یکتایی که مقدار آن روی $v_1,\dots,v_{n-1}$ برابر صفر و روی v_n برابر ۱ است، تابعکی ناصفر است که هسته آن فضای $n-1$ بعدی تولید شده با $v_1,\dots,v_{n-1}$ است.

نکته. تنها برداری که توسط همه تابعک‌های خطی به صفر نگاشته می‌شود بردار صفر است.

اثبات. برای اثبات گزاره بالا نشان می‌دهیم برای هر بردار ناصفری تابعکی وجود دارد که آن بردار را به صفر تصویر نمی‌کند. فرض کنید $v\in V$ بردار ناصفر دلخواهی باشد. مجموعه $\{v\}$ مستقل خطی است و می‌توان آن را به پایه $\{v,u_1,\dots,u_{n-1}\}$ برای V گسترش داد. تابعک خطی یکتای $f:V\to F$ وجود دارد که

$$f(v)=1,\quad f(u_1)=\cdots=f(u_{n-1})=0.$$

بنابراین تابعکی وجود دارد که v را به صفر تصویر نمی‌کند.

مجموعه همه تابعک‌های خطی روی V یک فضای برداری هم بعد با V است که به آن، *فضای دوگان* V می‌گویند و آن را با V^* نمایش می‌دهند. بنابراین $V^*=L(V,F)$. توجه کنید که بعد V^* برابر بعد V است و بنابراین این دو فضا یکریخت اند. با انتخاب یک پایه برای V و یک پایه برای V^* می‌توان یک یکریختی بین این دو فضا ارائه داد. این یکریختی کاملاً به انتخاب پایه‌ها وابسته است و با تغییر پایه‌ها این یکریختی نیز عوض می‌شود. در ادامه روشی ارائه می‌شود که با انتخاب پایه‌ای برای V یک پایه برای V^* بدست می‌آید.

فرض کنید $\alpha=\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد. در این صورت تابعک‌های خطی $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ که به صورت زیر معرفی می‌شوند پایه‌ای مرتب برای V^* تشکیل می‌دهند.

$$e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$$

e_i^* تابعکی است که مقدارش روی بردار e_i برابر ۱ و مقدارش روی بقیه e_jها برابر صفر است. به این پایه، *دوگان پایه* α می‌گویند و آن را با α^* نمایش می‌دهند.

نکته: برای هر $v\in V$ و $f\in V^*$ داریم

$$v=e_1^*(v)e_1+\cdots+e_n^*(v)e_n$$
$$f=f(e_1)e_1^*+\cdots+f(e_n)e_n^*$$

اثبات. فرض کنید $v=t_1e_1+\cdots+t_ne_n$. در این صورت داریم

$$e_i^*(v)=t_1e_i^*(e_1)+\cdots+t_ne_i^*(e_n)=t_i$$

همچنین اگر $f=s_1e_1^*+\cdots+s_ne_n^*$، آنگاه

$$f(e_i) = s_1 e_1^*(e_i) + \cdots + s_n e_n^*(e_i) = s_i$$

مثال. فرض کنید $V = \mathbb{R}^2$ بنابراین $V^* = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. برای تابعک خطی دلخواه $f \in V^*$ داریم

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1)$$

اگر قرار دهیم $a = f(1,0)$ و $b = f(0,1)$، تابعک خطی f به شکل $f(x,y) = ax + by$ خواهد بود. بنابراین

$$V^* = \{f : f(x,y) = ax + by, a, b \in \mathbb{R}\}$$

مثال. دوگان پایه $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ برابر است با $\{e_1^*, e_2^*\}$ که e_1^* و e_2^* به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\begin{array}{lll} e_1^*(1,0) = 1 & e_1^*(0,1) = 0 & \Rightarrow \quad e_1^*(x,y) = x \\ e_2^*(1,0) = 0 & e_2^*(0,1) = 1 & \Rightarrow \quad e_2^*(x,y) = y \end{array}$$

مثال. دوگان پایه $\{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$ برابر است با $\{v_1^*, v_2^*\}$ که v_1^* و v_2^* به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\begin{array}{lll} v_1^*(1,0) = 1 & v_1^*(1,1) = 0 & \Rightarrow \quad v_1^*(x,y) = x - y \\ v_2^*(1,0) = 0 & v_2^*(1,1) = 1 & \Rightarrow \quad v_2^*(x,y) = y \end{array}$$

مثال. تابعک‌های خطی روی فضای چند جمله‌ای‌ها

فرض کنید P^n مجموعه چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n با ضرایب در میدان F باشد. این مجموعه یک فضای برداری n بعدی روی F است. برای هر $a \in F$ تابع $f_a : P^n \to F$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f_a(p) = p(a)$$

این تابعها در فضای دوگان P^n قرار دارند؛ زیرا

$$f_a(p_1 + rp_2) = (p_1 + rp_2)(a) = p_1(a) + rp_2(a) = f_a(p_1) + rf_a(p_2)$$

اما توجه داشته باشید که لزوماً همه اعضای $(P^n)^*$ به شکل بالا نیستند. مثلاً برای هر $a \in F$ مقدار مشتق‌های مراتب بالاتر در a نیز در $(P^n)^*$ قرار دارد.

$$f : P^n \to F; \quad f(p) = p^{(i)}(a)$$

ترکیب‌های خطی این تابعها نیز همچنان در $(P^n)^*$ قرار دارند و لزوماً این تابعک‌ها به شکل f_a ها نیستند. با این حال نشان می‌دهیم اگر $a_1, \ldots, a_n$ عداد متمایزی در F باشند آنگاه $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$ یک پایه برای $(P^n)^*$ است. فرض کنید $t_1 f_{a_1} + \cdots + t_n f_{a_n} = 0$. بنابراین اثر این تابعک خطی روی هر چند جمله‌ای در P^n صفر می‌شود. چند جمله‌ای‌های p_i را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j)$$

توجه کنید که p_i یک چند جمله‌ای با درجه $n-1$ است که در نقطه a_i ناصفر و در بقیه a_j ها صفر می‌شود. مقدار $t_1 f_{a_1} + \cdots + t_n f_{a_n}$ روی p_i برابر است با

$$\begin{aligned}(t_1 f_{a_1} + \cdots + t_n f_{a_n})(p_i) &= t_1 f_{a_1}(p_i) + \cdots + t_n f_{a_n}(p_i) \\ &= t_1 p_i(a_1) + \cdots + t_n p_i(a_n) \\ &= t_i p_i(a_i)\end{aligned}$$

از صفر بودن $t_1 f_{a_1} + \cdots + t_n f_{a_n}$ نتیجه می‌شود که $t_i p_i(a_i) = 0$ و چون $p_i(a_i) \neq 0$ باید t_i برابر صفر باشد. این استدلال برای هر i نشان می‌دهد که همه ضرایب $t_1, \ldots, t_k$ باید صفر باشند. بنابراین $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ مستقل خطی است. از آنجا که $\dim(P^n)^* = \dim P^n = n$ این مجموعه یک پایه برای $(P^n)^*$ خواهند بود.

در اینجا این سوال مطرح می‌شود که آیا پایه‌ای برای P^n وجود دارد که دوگان آن $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$ باشد. با توجه به مطالب بالا جواب این سوال سخت نیست. در واقع با کمی اصلاح چند جمله‌ای‌های p_i پایه مورد نظر بدست می‌آید. کافی است قرار دهیم

$$q_i = \frac{1}{p_i(a_i)} p_i$$

در این صورت داریم

$$f_{a_i}(q_j) = q_j(a_i) = \frac{1}{p_j(a_i)} p_j(a_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

البته ما در اینجا فرض کردیم که $\{q_1, \ldots, q_n\}$ یک پایه برای P^n است. این موضوع از رابطه بالا نتیجه می‌شود، با این حال خوب است خودتان بدون استفاده از رابطه بالا این موضوع را ثابت کنید. به این ترتیب با توجه به رابطه بالا $\{q_1, \ldots, q_n\}$ پایه‌ای برای P^n است که دوگانش پایه $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ خواهد بود.

در حالت کلی جواب این سوال که آیا هر پایه‌ای در V^* دوگان یک پایه در V است ساده نیست. در ادامه ابزاری معرفی می‌شود که به کمک آن جواب این سوال و بسیاری دیگر از سوال‌های مشابه به سادگی مشخص می‌شوند.

فرض کنید $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای برای V و $\alpha^* = \{e_1^*, \ldots e_n^*\}$ دوگان آن باشد. این پایه‌ها تناظر زیر را بین فضاهای V و V^* ایجاد می‌کنند.

$$L : V \leftrightarrow V^* \qquad t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \leftrightarrow t_1 e_1^* + \cdots + t_n e_n^*$$

این تناظر همان یکریختی بین V و V^* است که پایه مرتب α را به پایه مرتب α^* می‌نگارد. این یکریختی از این جهت اهمیت دارد که پایه V^* به صورت مناسبی از روی پایه‌ای که در V انتخاب می‌کنیم معرفی می‌شود. با این حال این یکریختی طبیعی نیست، یعنی با عوض شدن پایه α یکریختی بالا نیز عوض می‌شود. این موضوع در مثال‌های بالا به روشنی دیده می‌شود. به عبارت دیگر به هر عضو V نمی‌توان به صورت طبیعی و بدون مشخص کردن پایه‌ای عضوی از V^* را نسبت داد.

اما بین V و $(V^*)^*$ یک یکریختی طبیعی وجود دارد. معمولاً فضای $(V^*)^*$ را با V^{**} نمایش می‌دهیم. در نگاه اول V^{**} فضایی پیچیده‌تر از V^* به نظر می‌رسد. اما در واقع چنین نیست.

فرض کنید $v \in V$ بردار دلخواهی باشد. تابع زیر را روی V^* در نظر بگیرید.

$$\psi_v : V^* \to F; \quad \psi_v(f) = f(v)$$

ψ_v به هر تابعک $f \in V^*$ مقدار آن را روی بردار v نسبت می‌دهد. این تابع یک تابعک خطی روی V^* است زیرا

$$\psi_v(f_1 + r f_2) = (f_1 + r f_2)(v) = f_1(v) + r f_2(v) = \psi_v(f_1) + r\psi_v(f_2)$$

قضیه: نگاشت $\ell : V \to V^{**}$ که به هر بردار $v \in V$ تابع ψ_v را نسبت می‌دهد یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا بین V و V^{**} است.

اثبات: برای اینکه نشان دهیم ℓ خطی است باید نشان دهیم برای هر $v_1, v_2 \in V$ و $r \in F$

$$\ell(v_1 + rv_2) = \ell(v_1) + r\ell(v_2).$$

اما $\ell(v_1 + rv_2)$ همان $\psi_{v_1+rv_2}$ است و $\ell(v_1)$ و $\ell(v_2)$ نیز به ترتیب ψ_{v_1} و ψ_{v_2} اند. برای هر $f \in V^*$ دلخواه داریم

$$\psi_{v_1+rv_2}(f) = f(v_1 + rv_2) = f(v_1) + rf(v_2) = \psi_{v_1}(f) + r\psi_{v_2}(f)$$

در نتیجه $\psi_{v_1+rv_2} = \psi_{v_1} + r\psi_{v_2}$.

فرض کنید بردار $v \in V$ در هسته ℓ قرار داشته باشد. طبق تعریف ℓ، ψ_v تابعک صفر روی V^* است. در نتیجه برای هر $f \in V^*$ باید داشته باشیم $f(v) = \psi_v(f) = 0$. بنابراین بردار v توسط همه تابعک‌های خطی به صفر نگاشته می‌شود. تنها بردار با این ویژگی بردار صفر است. درنتیجه $\ker(\ell) = \{0\}$. چون بعد V^{**} برابر بعد V^* است و بعد V^* نیز برابر بعد V است، نگاشت خطی ℓ یک یکریختی بین V و V^{**} خواهد بود.

دقت کنید نگاشت ℓ بدون نیاز به مشخص کردن پایه‌ای برای V یا V^{**} به هر عضو V به صورت طبیعی عضوی از V^{**} را نسبت می‌دهد. بنابراین معمولاً V^{**} را برابر با V می‌گیریم! به عبارتی دیگر بدون هیچ پیش فرضی هر عضو V^{**} یک متناظر مشخص در V دارد.

به کمک این یکسانی طبیعی که بین V و V^{**} وجود دارد احکام زیر به سادگی نتیجه می‌شوند.

قضیه: اگر $\alpha^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ پایه‌ای برای V^* باشد، پایه‌ای مانند $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ برای V وجود دارد که دوگانش همان پایه α^* باشد. به عبارت دیگر پایه α وجود دارد که

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $\alpha^{**} = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ پایه دوگان $\alpha^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ باشد. بردارهای $e_1, \ldots, e_n$ وجود دارند که $\psi_i = \psi_{e_i}$ یا به عبارت دیگر

$$\psi_i(e_j^*) = e_j^*(e_i)$$

چون $\psi_1, \ldots, \psi_n$ دوگان پایه $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ است داریم

$$e_i^*(e_j) = \psi_j(e_i^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

بنابراین $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای برای V است که دوگان آن برابر است با $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$.

به این جهت پایه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ را نیز *دوگان پایه* $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ می‌گوییم.

قضیه: فرض کنید $W \subsetneq V^*$ زیر فضایی اکید از V^* باشد. در این صورت بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد که برای هر تابعک خطی $f \in W$ داشته باشیم $f(v) = 0$.

اثبات: فرض کنید $\{f_1, \ldots, f_k\}$ پایه‌ای برای W و $\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ گسترش آن به پایه‌ای برای V^* باشد. همچنین فرض کنید $\{e_1, \ldots, e_n\}$ دوگان پایه بالا در V باشد. بنابراین داریم

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

به‌این ترتیب هر یک از بردارهای $e_{k+1}, \dots, e_n$ دارای ویژگی مورد نظر مسئله است.

در اثبات بالا درواقع این حکم ثابت شد که بردار $v = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$ توسط هر تابعک $f \in W$ به صفر تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $t_1 = \cdots = t_k = 0$. به عبارت دیگر مجموعه همه بردارهایی که توسط همه اعضای W به صفر نگاشته می‌شوند همان فضای تولید شده توسط $e_{k+1}, \dots, e_n$ است. به این مجموعه که یک زیر فضای V نیز است مجموعه صفرهای W می‌گوییم. این تعریف را برای هر مجموعه $D \subseteq V^*$ نیز، اگر چه زیر فضا نباشد، می‌توان ارائه کرد.

تعریف. فرض کنید $D \subset V^*$ زیر مجموعه دلخواه از تابعک‌های خطی روی فضای برداری V باشد. به مجموعه

$$\{v \in V \ : \ \forall f \in D, \ f(v) = 0\} = \bigcap_{f \in D} \ker f$$

مجموعه صفرهای **D می‌گوییم.**

به صورت مشابه می‌توانیم به هر مجموعه‌ای از بردارها مانند $S \subseteq V$ مجموعه تابعک‌هایی را نسبت دهیم که تصویر S توسط آنها صفر است.

تعریف. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از V باشد. به مجموعه زیر ***پوچساز*** **S می‌گوییم.**

$$S^0 = \{f \in V^* : f(S) = 0\}$$

اگر D زیرمجموعه‌ای دلخواه در V^* باشد آنگاه با توجه به یکسانی طبیعی بین V^{**} و V پوچساز D بردارهایی در V خواهند بود که توسط همه اعضای D به صفر تبدیل می‌شوند. یعنی مجموعه صفرهای D متناظر پوچساز D است. به همین سبب به مجموعه صفرهای D، پوچساز D نیز می‌گوییم و آن را با D^0 نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned} D^0 &= \{\psi \in V^{**} : \psi(D) = 0\} \\ &\equiv \{v \in V : \psi_v(D) = 0\} = \{v \in V : \forall f \in D \quad f(v) = 0\} \end{aligned}$$

بنابراین در این نوشته پوچساز یک زیر مجموعه V مجموعه‌ای در V^* است و پوچساز یک زیر مجموعه V^* مجموعه‌ای در V است. ولی با توجه به اینکه هر دو یک ماهیت دارند هر حکمی که راجع به یکی برقرار باشد راجع به دیگری نیز برقرار خواهد بود.

گزاره. اگر $S_1 \subseteq S_2$ آنگاه $S_1^0 \supseteq S_2^0$.

اثبات. با توجه به تعریف پوچساز واضح است.

قضیه: فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از فضای برداری V باشد. در این صورت S^0 زیر فضایی از V^* است و $S^0 = \langle S \rangle^0$.

اثبات: فرض کنید $f_1, f_2 \in S^0$ در این صورت برای هر v در S داریم.

$$(f_1 + rf_2)(v) = f_1(v) + rf_2(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 + rf_2 \in S^0$$

برای اثبات قسمت دوم ابتدا دقت کنید که اگر $S_1 \subset S_2$ آنگاه $S_1^0 \supset S_2^0$. بنابراین $S^0 \supset \langle S \rangle^0$. به این ترتیب تنها کافی است نشان دهیم $S^0 \subset \langle S \rangle^0$. فرض کنید $f \in S^0$. برای هر $v \in \langle S \rangle$ بردارهای $v_1, \dots, v_k$ در S وجود دارند به گونه‌ای که $v = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k$.

$$f(v) = f(t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k) = t_1 f(v_1) + \cdots + t_k f(v_k) = 0$$

این نشان می‌دهد که $f \in \langle S \rangle^0$ و در نتیجه $S^0 \subset \langle S \rangle^0$.

یک نتیجه مستقیم قضیه بالا گزاره زیر است.

نتیجه. فرض کنید D زیر مجموعه‌ای از فضای برداری V^* باشد. در این صورت D^0 زیرفضایی از V است و $D^0 = \langle D \rangle^0$.

قضیه: فرض کنید $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ **پایه‌ای برای** V **و** $\alpha^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ **دوگان** α **باشد. در این صورت**

$$\{e_1, \dots, e_k\}^\circ = \langle e_{k+1}^*, \dots, e_n^* \rangle \qquad \{e_{k+1}^*, \dots, e_n^*\}^\circ = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

اثبات. فرض کنید $f = t_1 e_1^* + \dots + t_n e_n^*$ تابعک دلخواهی باشد. با توجه به اینکه $t_i = f(e_i)$ داریم

$$\begin{aligned} f \in \{e_1, \dots, e_k\}^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad f(e_1) = \dots = f(e_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t_1 = \dots = t_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad f \in \langle e_{k+1}^*, \dots, e_n^* \rangle \end{aligned}$$

رابطه دوم نیز نتیجه مستقیم رابطه اول است.

نتیجه. برای هر زیر فضای W **از** V **داریم** $(W^\circ)^\circ = W$. **برای هر زیر فضای** Z **از** V^* **نیز داریم** $(Z^\circ)^\circ = Z$.

نتیجه: برای هر زیر فضای W **از** V **داریم** $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$. **برای هر زیر فضای** Z **از** V^* **نیز داریم** $\dim Z + \dim Z^\circ = \dim V^* = \dim V$.

نتیجه: اگر S زیرمجموعه دلخواهی در V باشد آنگاه $\langle S \rangle = (S^\circ)^\circ$. اگر D زیرمجموعه دلخواهی در V^* باشد آنگاه $\langle D \rangle = (D^\circ)^\circ$. به عبارت دیگر فضای تولید شده توسط S مجموعه بردارهایی است که توسط هر تابعک خطی‌ای که روی S صفر است به صفر تبدیل می‌شوند. همچنین فضای تولید شده توسط D مجموعه همه تابعک‌های خطی‌ای است که هسته آنها شامل صفرهای D اند.

قضیه: فرض کنید $g, f_1, \dots, f_k \in V^*$ **تابعک‌هایی دلخواه اند. در این صورت**

$$g \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subseteq \ker(g) \quad \Leftrightarrow \quad \{f_1, \dots, f_k\}^\circ \subseteq \{g\}^\circ$$

اثبات. ابتدا توجه کنید که رابطه

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subseteq \ker(g) \qquad \Leftrightarrow \qquad \{f_1, \dots, f_k\}^\circ \subseteq \{g\}^\circ$$

در واقع چیزی بیشتر از تعریف پوچساز نیست. با توجه به ویژگی‌های پوچساز داریم

$$\begin{aligned} g \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle g \rangle \subseteq \langle f_1, \dots, f_k \rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \langle g \rangle^\circ \supseteq \langle f_1, \dots, f_k \rangle^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad \{g\}^\circ \supseteq \{f_1, \dots, f_k\}^\circ \end{aligned}$$

در سطر دوم از این نکته استفاده شده است که اگر W یک زیر فضا با شد آنگاه $W^{\circ\circ} = W$. در سطر سوم نیز از رابطه $S^\circ = \langle S \rangle^\circ$ استفاده شده است.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی باشد. هر تابعک $f \in W^*$ نگاشتی خطی از W به F است. بنابراین fT (یا همان $f \circ T$) نگاشتی خطی از V به F می‌شود. به عبارت دیگر برای هر $f \in W^*$، fT عضوی در V^* است.

فرض کنید $T : V \to W$ یک نگشت خطی باشد. در این صورت نگاشت

$$T^t : W^* \to V^*; \ f \mapsto fT$$

نیز یک نگاشت خطی است زیرا برای هر $v \in V$،

$$\begin{aligned} T^t(f_1 + r f_2)(v) &= (f_1 + r f_2)(T(v)) = f_1(T(v)) + r f_2(T(v)) \\ &= T^t(f_1)(v) + r T^t(f_2)(v) = (T^t(f_1) + r T^t(f_2))(v) \end{aligned}$$

بنابراین $T^t(f_1 + rf_2) = T^t(f_1) + rT^t(f_2)$.

قضیه. اگر α و β به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W و α^* و β^* دوگان آنها باشند آنگاه برای هر تبدیل خطی $T : V \to W$ داریم

$$([T]^\alpha_\beta)_{ij} = ([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji}$$

اثبات. می‌دانیم که اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V و $\alpha^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ دوگان آن باشد برای هر $v \in V$ و $f \in V^*$ داریم

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = v_1^*(v)v_1 + \cdots + v_n^*(v)v_n$$
$$f = s_1 v_1^* + \cdots + s_n v_n^* = f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*$$

به عبارت دیگر درایه iام نمایش v در پایه α برابر است با $v_i^*(v)$ و درایه jام نمایش f در پایه α^* برابر است با $f(v_j)$. از طرفی $([T]^\alpha_\beta)_{ij}$ برابر است با درایه i ام نمایش $T(v_j)$ در پایه β. در نتیجه

$$([T]^\alpha_\beta)_{ij} = w_i^*(T(v_j))$$

به همین صورت $([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji}$ برابر است با درایه jام نمایش $T^t(w_i^*)$ در پایه α^*. در نتیجه طبق تعریف T^t داریم

$$([T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*})_{ji} = T^t(w_i^*)(v_j) = w_i^*(T(v_j)) = ([T]^\alpha_\beta)_{ij}$$

نتیجه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی وارون‌پذیر باشد و تصویر پایه α توسط T پایه β شده باشد؛ یعنی $T(\alpha) = \beta$. در این صورت $T^t(\beta^*) = \alpha^*$

اثبات. با فرض‌های بالا داریم $[T]^\alpha_\beta = I$. بنابراین $[T^t]^{\beta^*}_{\alpha^*} = I^t = I$. این نیز بدان معنی است که $T^t(\beta^*) = \alpha^*$.

تعریف: فرض کنید A ماتریس $m \times n$ است. به ماتریس B با ابعاد $n \times m$ ترانهاده A گوییم هرگاه برای هر i, j $(A)_{ij} = (B)_{ji}$. **در این صورت می‌نویسیم** $B = A^t$.

بنابراین طبق تعریف بالا نمایش T^t در پایه‌های β^* و α^* ترانهاده نمایش T در پایه‌های α و β است.

نتیجه. با توجه به یکسانی‌های $V^{**} \equiv V$ و $W^{**} \equiv W$ داریم $(T^t)^t = T$. این موضوع با توجه به رابطه نمایش یک نگاشت خطی و ترانهاده آن نیز به سادگی نتیجه می‌شود.

قضیه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است در این صورت $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\circ$.

اثبات.

$$\begin{aligned} f \in \ker T^t &\Leftrightarrow T^t(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in V \quad T^t(f)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in V \quad f(T(v)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in (\operatorname{Im} T)^\circ \end{aligned}$$

نتیجه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. در این صورت $\ker T = (\operatorname{Im} T^t)^\circ$ **یا به عبارت دیگر** $\operatorname{Im} T^t = (\ker T)^\circ$

اثبات. کافی است نتیجه قضیه بالا را برای T^t استفاده کنیم و توجه کنیم که $(T^t)^t = T$.

نتیجه. فرض کنید $T : V \to W$ یک نگاشت خطی است. در این صورت

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

اثبات. طبق قضیه بعد داریم

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

طبق قضایای قبل داریم

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\ker T)^{\circ} = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

بنابراین

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim V - \dim(\ker T) = \dim(\operatorname{Im} T^t)$$

تعریف. بعد تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ را *رتبه* T می‌گوییم و آن را با $rank\, T$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که اگر $\alpha = \{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد آنگاه $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ تصویر نگاشت T را تولید می‌کنند. بنابراین $rank\, T = \dim\langle T(v_1),\dots,T(v_n)\rangle$. با توجه به اینکه

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [T(v_n)]_\beta \right]$$

رتبه T برابر با بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های ماتریس نمایش T است. به این ترتیب *رتبه یک ماتریس* را برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن تعریف می‌کنیم. در نتیجه $rank\, T = rank\,[T]$.

طبق قضیه بالا داریم $rank\, T = rank\, T^t$ و طبق قضایای قبل

$$rank\,[T]_\beta^\alpha = rank\,[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = rank\,\left([T]_\beta^\alpha\right)^t$$

بنابراین برای هر ماتریس A داریم $rank\, A = rank\, A^t$. به عبارت دیگر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های A برابر است با بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های A^t. اما ستون‌های A^t در واقع سطرهای A اند. بنابراین بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های یک ماتریس با بعد فضای تولید شده توسط سطرهای آن برابر است. این موضوع را در فصل آینده به شیوه‌ای دیگر می‌بینیم.

قضیه. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن است.

---

۵. دستگاه‌های خطی

مقدمه

مسئله‌های زیر را در نظر بگیرید.

۱. آیا بردار داده شده $w \in W$ در فضای تولید شده توسط بردارهای $w_۱,\dots,w_n$ قرار دارد؟ اگر چنین است چه ترکیب‌های خطی $w_۱,\dots,w_n$ برابر w می‌شوند.

۲. آیا بردار داده شده $w \in W$ در تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ قرار دارد؟ اگر چنین است چه بردارهایی در V توسط T به W نگاشته می‌شود.

این دو سوال به سادگی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. اگر $\alpha = \{v_۱,\dots,v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه تصویر نگاشت T با بردارهای $w_۱ = T(v_۱),\dots,w_n = T(v_n)$ تولید می‌شود بنابراین سوال دوم به سوال اول تبدیل می‌گردد. به همین صورت با معرفی نگاشت خطی $T : F^n \to W$ که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $T(e_i) = w_i$، سوال اول به سوال دوم تبدیل می‌شود.

برای جواب دادن به این سوال‌ها لازم است که بردارهای $w_۱,\dots,w_n$ و همچنین نگاشت خطی T به صورتی معرفی شده باشند. بنابراین فرض می‌کنیم α و β پایه‌هایی مرتب برای V , W باشند و نمایش بردارهای w و $w_۱,\dots,w_n$ و یا نگاشت خطی T در این پایه‌ها داده شده باشند.

$$[T]^\alpha_\beta \; [w_۱]_\beta,\dots,[w_n]_\beta \; [w]_\beta$$

برای مثال زمانی که $W = F^m, V = F^n$ فرض کنید نمایش استاندارد بردارها و نگاشت خطی بالا در پایه‌های استاندارد داده شده اند.
در این صورت سوال‌های بالا به پیدا کردن بردارهای ستونی $X \in F^n$ تبدیل می‌شود که

$$[T]^\alpha_\beta X = [w]_\beta \text{ و یا } \Big[[w_۱]_\beta\Big|\dots\Big|[w_n]_\beta\Big] X = [w]_\beta$$

به چنین معادلاتی *دستگاه خطی* می‌گویند. بنابراین یک دستگاه خطی رابطه‌ای به صورت

$$AX = b$$

است که در آن b یک بردار ستونی داده شده در F^m، A یک ماتریس $m \times n$ مشخص و X بردار ستونی مجهولی در F^n است که باید به گونه ای پیدا شود که رابطه بالا برقرار شود.

ما معمولاً یک دستگاه خطی را به عنوان نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های α و β برای V و W در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم $A = [T]^\alpha_\beta$ و $b = [w]_\beta$ و X نمایش بردارهایی مانند $v \in V$ در پایه α است که $T(v) = w$.

اگر بردار w در تصویر نگاشت T قرار داشته باشد آنگاه رابطه $T(v) = w$ دارای جواب است و مجموعه جواب‌های آن انتقالی از $\ker T$ است و بنابراین هم شکل و هم بعد با $\ker T$ هستند. $\ker T$ نیز مجموعه جواب‌های معادله $T(v) = ۰$ است که محاسبه آن در واقع حل کردن یک دستگاه خطی است. به معادله $T(v) = ۰$ و دستگاه $AX = ۰$ به ترتیب *معادله همگن* و *دستگاه خطی همگن* می‌گوییم. بنابراین مجموعه جواب‌های معادله ناهمگن برابر جمع مجموعه جواب‌های معادله همگن است با یک جواب خاص معادله ناهمگن. همچنین مجموعه جواب‌های معادله همگن یک زیرفضای برداری V است و برای مشخص کردن آن می‌توان پایه‌ای برای آن ارائه داد.

نکاتی در مورد دستگاه‌های خطی

در قسمت قبل یک دستگاه خطی به عنوان نمایشی برای رابطه $T(v) = w$ معرفی شد. در این فصل نکات و قضایایی در مورد دستگاه‌های خطی بیان می‌کنیم که ما را در حل کردن این دستگاه‌ها کمک می‌کند. با این حال مطالب این فصل برای حل عملی یک دستگاه چندان موثر نیست. روش عملی برای حل یک دستگاه خطی در قسمت بعد بیان می‌شود. می‌توان این قسمت را در مطالعه سریع نادیده‌گرفت.

فرض کنید دستگاه خطی $AX = b$ نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های α و β برای V و W باشد. یعنی فرض می‌کنیم $A = [T]_\beta^\alpha$ و $b = [w]_\beta$ و X نمایش بردارهایی مانند $v \in V$ در پایه α است که $T(v) = w$.

توجه داشته باشید که اگر پایه β تغییر کند اگر چه نمایش‌های $[w]_\beta$ ویا $[T]_\beta^\alpha$ تغییر می‌کنند اما نمایش $X = [v]_\alpha$ تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر دستگاه خطی به گونه‌ای تغییر می‌کند که جواب‌های آن عوض نمی‌شوند.

درواقع گر β' پایه‌ای دیگر برای W باشد و $P = [I_W]_{\beta'}^{\beta}$، آنگاه

$$[T]_{\beta'}^{\alpha} = [I_W T]_{\beta'}^{\alpha} = [I_W]_{\beta'}^{\beta}.[T]_\beta^\alpha = P[T]_\beta^\alpha = PA$$

$$[w]_{\beta'} = [I_W(w)]_{\beta'} = [I_W]_{\beta'}^{\beta}.[w]_\beta = P[w]_\beta = Pb$$

در نتیجه دستگاه $AX = b$ در پایه‌های α و β' به دستگاه $A'X = b'$ تبدیل می‌شود که درآن $A' = PA$ و $b' = Pb$ بدون اینکه جواب‌های آن تغییر کند. هدف ما پیدا کردن پایه β' است که جواب‌های دستگاه جدید $A'X = b'$ که همان جواب‌های دستگاه $AX = b$ است به سادگی از شکل آن دستگاه بدست آیند.

دقت کنید که رابطه $T(v) = w$ را می‌توان در پایه دیگری بجای α نیز نوشت. اما با تغییر پایه α، $X = [v]_\alpha$ نیز تغییر می‌کند. یعنی جواب‌های دستگاه تغییر خواهند کرد. بنابراین ما تنها اجازه خواهیم داد پایه β تغییر کند و پایه $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ را برای V ثابت در نظر می‌گیریم.

برای اینکه $[T]_{\beta'}^{\alpha}$ تا حد ممکن ساده باشد لازم است اعضای پایه β' تا جای ممکن از میان بردارهای $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ انتخاب شوند. این بردارها مولدی برای زیر فضای $\operatorname{Im} T$ هستند. بنابراین با حذف تعدادی از آن‌ها پایه‌ای برای این زیرفضا بدست می‌آید که می‌توان آن را به پایه‌ای برای W گسترش داد. در زیر روشی برای این منظور ارائه می‌دهیم.

در ابتدا (مرحله $i = 0$) مجموعه $\mathcal{A}$ را برابر $\varnothing$ فرض کنید. این مجموعه را مرحله به مرحله به گونه‌ای بزرگ می‌کنیم که مستقل خطی باقی بماند. در مرحله iام اگر $T(v_i)$ در فضای تولید شده توسط بردارهای داخل $\mathcal{A}$ قرار نداشت آن را به $\mathcal{A}$ اضافه می‌کنیم درغیر این‌صورت بدون تغییر $\mathcal{A}$ به مرحله $i + 1$ام می‌رویم و این کار را تا مرحله $i = n$ ادامه می‌دهیم. در انتها اگر $\mathcal{A} = \{T(v_{p_1}), \ldots, T(v_{p_r})\}$ آنگاه $T(v_{p_1})$ اولین بردار ناصفر در بین $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ است و برای هر $p_s < i < p_{s+1}$، $T(v_i)$ در فضای تولید شده توسط $\{T(v_{p_1}), \ldots, T(v_{p_s})\}$ قرار دارد. به این ترتیب $\mathcal{A}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} T$ خواهد بود که می‌توان آن را به پایه β' برای W گسترش داد. نمایش نگاشت خطی T در پایه‌های α و β' به صورت زیر است.

$$A' = [T]_{\beta'}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{\overset{p_1}{\downarrow}}{1} & * & \cdots & * & \overset{\overset{p_2}{\downarrow}}{0} & * & \cdots & * & \overset{\overset{p_3}{\downarrow}}{0} & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا همه درایه‌های ستون p_sام صفر است بجز درایه sام که برابر یک است. این ماتریس تنها دارای r سطر ناصفر است. سطرها به صورت پلکانی زیر هم قرار گرفته‌اند و سطرهای صفر زیر سطرهای ناصفر قرار دارند. اولین درایه ناصفر سطر sام در ستون p_sام قرار دارد و برابر یک است. به چنین ماتریسی ماتریس *ساده سطری* می‌گوییم.
دقت کنید که جواب‌های دستگاه $A'X = b'$ به سادگی معرفی می‌شوند، اگر $x_1, \ldots, x_n$ مولفه‌های X و $b'_1, \ldots, b'_m$ مولفه‌های b' باشند آنگاه دستگاه $A'X = b'$ به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{1j} x_j &= b'_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{rj} x_j &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه $A'X = b'$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$. در این صورت مقادیر x_j را برای $j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$ می‌توان آزادانه انتخاب کرد و از روی آن مقادیر $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ به صورت یکتا مشخص می‌شوند و X جوابی برای دستگاه $A'X = b'$ خواهد بود.
به این تریب بنظر می‌رسد حل کردن دستگاه $AX = b$ کار ساده‌ای باشد. تنها کافی است دستگاه معادل $A'X = b'$ را بدست آورد. برای این کار نیز باید پایه β' را بدست آورد. با توجه به اینکه $[T(v_i)]_\beta$ها ستون‌های ماتریس A هستند، برای پیدا کردن پایه β' باید به ترتیب از ستون اول ماتریس A شروع کرده و تا جای ممکن ستون‌های مستقل خطی را انتخاب کنیم. بقیه ستون‌های ماتریس A به صورت ترکیب خطی این ستون‌ها هستند. اما اینجا کار به اتمام نمی‌رسد و باید ماتریس A' را کاملاً بدست آوریم. برای این کار لازم است بدانیم که هر یک از ستون‌های ماتریس A چه ترکیب خطی‌ای از اعضای β' اند. اما برای این کار باید یک دستگاه خطی دیگر را حل کنیم. توجه داشته باشید که ماتریس تغییر پایه از β به β' (که با P نمایش داده‌ایم) وارون ماتریس $\left[[T(v_{p_1})]_\beta \middle| \ldots \middle| [T(v_{p_n})]_\beta\right]$ است و محاسبه این وارون خود منجر به حل یک دستگاه خطی دیگر خواهد شد.
بنابراین اگرچه می‌دانیم که دستگاه $AX = b$ را می‌توان به دستگاه جدیدی تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آیند، اما تاکنون روش مناسبی برای بدست آوردن دستگاه جدید ارائه نداده‌ایم. در ادامه برای بدست آوردن دستگاه ساده $A'X = b'$، پایه β را در طی چند مرحله به پایه β' تبدیل می‌کنیم که در طی هرکدام تغییرات دستگاه به راحتی و بدون نیاز به حل یک دستگاه خطی پیچیده قابل تشخیص است.

گزاره. با تغییرات زیر می‌توان از هر پایه مرتب β به هر پایه مرتب دیگر β' رسید.

- **عوض کردن جای دو عضو پایه.**
- **ضرب کردن عددی ناصفر در یک عضو پایه**
- **جمع کردن مضربی از یک عضو پایه با عضو دیگر.**

دقت کنید اگر هر کدام از عمل‌های بالا روی یک پایه انجام شود نتیجه باز یک پایه است و دوباره می‌توان با انجام یکی از عمل‌های بالا از پایه جدید به پایه قبلی رسید. به اعمال بالا اعمال *پایه‌ای مقدماتی* می‌گوییم. در واقع با انجام این اعمال روی یک مجموعه مرتب از بردارها فضای تولید شده توسط آن بردارها تغییر نمی‌کند.
اثبات. فرض کنید $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ و $\beta' = \{w'_1, \ldots, w'_m\}$ و فرض کنید i عضو اول β با i عضو اول β' برابر باشند (i می‌تواند صفر باشد.)

$$w'_1 = w_1, \ldots, w'_i = w_i$$

نشان می‌دهیم با انجام اعمال بالا می‌توان از پایه β به پایه‌ای رسید که $(i+1)$ عضو اول آن با $(i+1)$ عضو اول β' برابر است و در نتیجه با ادامه این کار از پایه β به پایه β' می‌رسیم. w'_{i+1} را می‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای β نوشت.

$$w'_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + t_{i+1} w_{i+1} + \cdots + t_m w_m$$

یکی از ضرایب $t_{i+1},\dots,t_m$ مانند t_s باید ناصفر باشد، زیرا در غیر این صورت w'_{i+1} به صورت ترکیب خطی $w_1,\dots,w_i$ خواهد بود و چون $w'_1 = w_1,\dots,w'_i = w_i$، $\{w'_1,\dots,w'_i,w'_{i+1}\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد، در حالی که اعضای پایه باید مستقل خطی باشند! با ضرب کردن w_s در t_s و جابجا کردن آن با w_{i+1} می‌توان فرض کرد $t_{i+1} = 1$. به عبارت دیگر می‌توان به وضعیت زیر رسید.

$$w'_{i+1} = t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + w_{i+1} + \cdots + t_m w_m$$

اگر برای هر $j \neq i+1$، حاصل‌ضرب t_j در w_j را با w_{i+1} جمع کنیم پایه‌ای بدست می‌آید که عضو $i+1$ام آن برابر w'_{i+1} است. در طول انجام این اعمال اعضای $w_1,\dots,w_i$ تغییر نمی‌کنند بنابراین $i+1$ عضو اول این پایه برابر $i+1$ عضو اول پایه β' است.

اکنون باید تاثیر هر یک از تغییرهای بالا را بر یک دستگاه خطی بررسی کنیم.

فرض کنید β یک پایه مرتب برای W باشد و پایه‌های مرتب β_1 و β_2 و β_3 به ترتیب از روی پایه β با جابجا کردن عضو iام و jام، ضرب کردن عضو iام در عدد ناصفر r و جمع کردن r برابر عضو jام با عضو iام بدست آیند. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
\beta &= \{w_1,\dots,w_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}\\
\beta_1 &= \{w_1,\dots,w_j,\dots,w_i,\dots,w_m\}\\
\beta_2 &= \{w_1,\dots,rw_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}\\
\beta_3 &= \{w_1,\dots,rw_j + w_i,\dots,w_j,\dots,w_m\}
\end{aligned}$$

نمایش یک بردار $w \in W$ در پایه‌های بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
w &= t_1 w_1 + \cdots + t_i w_i + \cdots + t_j w_j + \cdots + t_m w_m\\
w &= t_1 w_1 + \cdots + t_j w_j + \cdots + t_i w_i + \cdots + t_m w_m\\
w &= t_1 w_1 + \cdots + \frac{t_i}{r}(rw_i) + \cdots + t_j w_j + \cdots + t_m w_m\\
w &= t_1 w_1 + \cdots + t_i(w_i + rw_j) + \cdots + (t_j - rt_i)w_j + \cdots + t_m w_m
\end{aligned}$$

بنابراین

$$[w]_\beta = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_m \end{bmatrix},\quad [w]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_m \end{bmatrix}\quad [w]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ \frac{t_i}{r}\\ \vdots\\ t_j\\ \vdots\\ t_m \end{bmatrix}\quad [w]_{\beta_3} = \begin{bmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_i\\ \vdots\\ t_j - rt_i\\ \vdots\\ t_m \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر $[w]_{\beta_1}$، $[w]_{\beta_2}$ و $[w]_{\beta_3}$ از روی $[w]_\beta$ به ترتیب با جابجا کردن سطر iام و jام، ضرب کردن سطر iام در عدد ناصفر r^{-1} و جمع کردن $-r$ برابر سطر iام با سطر jام بدست می‌آیند.

به این ترتیب اگر نمایش رابطه $T(v) = w$ در پایه‌های β، β_1، β_2 و β_3 به ترتیب برابر $AX = b$ و $A_1X = b_1$ و $A_2X = b_2$ و $A_3X = b_3$ باشد آنگاه ستون b_1 و ستون‌های ماتریس A_1 از جابجا کردن درایه‌های iام و jام ستون b و ستون‌های ماتریس A بدست می‌آیند، به عبارت دیگر ماتریس $[A_1 \mid b_1]$ از جابجا کردن سطر iام و سطر jام ماتریس $[A \mid b]$ بدست می‌آید. به همین صورت ماتریس

$[A_2 \mid b_2]$ از ضرب کردن سطر iام ماتریس $[A \mid b]$ در عدد ناصفر r^{-1} بدست می‌آید و $[A_3 \mid b_3]$ از جمع کردن $-r$ برابر سطر iام با سطر jام ماتریس $[A \mid b]$ بدست می‌آید.

اگر E_i ماتریس تغییر پایه از β به β_i باشد ($i = 1,2,3$)، آنگاه

$$A_i = [T]_{\beta_i}^{\alpha} = [I_W T]_{\beta_i}^{\alpha} = [I_W]_{\beta_i}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\alpha} = E_i A$$
$$b_i = [w]_{\beta_i} = [I_W(w)]_{\beta_i} = [I_W]_{\beta_i}^{\beta} \cdot [w]_{\beta} = E_i b$$

به عبارت دیگر $[A_i \mid b_i] = E_i[A \mid b]$. به ماتریس‌های E_i *ماتریس‌های مقدماتی* می‌گوییم.
دقت کنید که ماتریس‌های مقدماتی وارون‌پذیرند و از آنجا که هر ماتریس وارون‌پذیر نمایش نگاشت همانی در دو پایه مناسب فضا است و هر دو پایه را نیز می‌توان با انجام دنباله‌ای از اعمال پایه‌ای مقدماتی به هم تبدیل کرد، هر ماتریس وارون‌پذیر از ضرب کردن دنباله‌ای از ماتریس‌های مقدماتی در ماتریس همانی بدست می‌آید. به عبارت دیگر هر ماتریس وارون‌پذیر برابر حاصل ضرب تعدادی ماتریس مقدماتی است.

به ماتریس $m \times (n+1)$ تایی $[A \mid b]$ که از اضافه کردن ستون b به ماتریس ضرایب A بدست می‌آید، *ماتریس افزوده دستگاه* $AX = b$ می‌گویند. این ماتریس کاملاً دستگاه $AX = b$ را معرفی می‌کند. به اعمال زیر که روی سطرهای یک ستون یا یک ماتریس اعمال می‌شوند نیز *اعمال سطری مقدماتی* می‌گوییم.

۱. جابجا کردن دو سطر.

۲. ضرب کردن یک سطر در عددی ناصفر.

۳. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

دو ماتریسی را که به این صورت به هم تبدیل می‌شوند هم‌ارز سطری می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه M و N هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.
طبق آنچه بیان شد با انجام این اعمال روی سطرهای ماتریس افزوده یک دستگاه خطی جواب‌های دستگاه خطی تغییر نمی‌کند و می‌توان آن را به دستگاه ساده‌ای تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آیند. در واقع با انجام این اعمال روی ماتریس افزوده یک دستگاه می‌توان قسمت ضرایب آن ماتریس را به شکل ساده سطری تبدیل کرد.

گزاره. سه ویژگی زیر برای دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ با هم معادل اند.

۱. این دو دستگاه خطی به ترتیب نمایش‌های معادله $T(v) = w$ در پایه‌های α و β و α و β' اند.

۲.ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $A' = PA$ و $b' = Pb$.

۳. ماتریس افزوده این دو دستگاه هم‌ارز سطری اند.

دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ را که در شرایط بالا صدق کنند *دو دستگاه هم‌ارز* می‌نامیم.
واضح است که جواب‌های دو دستگاه خطی هم‌ارز با یکدیگر برابرند. عکس این گزاره نیز درست است.

قضیه. هر دو دستگاه هم اندازه $AX = b$ و $A'X = b'$ که دارای جواب بوده و مجموعه جواب‌های آنها با هم برابر باشند هم‌ارز هستند.

اثبات. فرض کنید نگاشت‌های خطی $L_{A'}, L_A : F^n \to F^m$ به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$L_{A'}(X) = A'X \quad \text{و} \quad L_A(X) = AX$$

هسته‌های این دو نگاشت خطی با هم برابر هستند زیرا هسته یک نگاشت خطی برابر انتقال هر یک از سطح‌های تراز آن به مبدا است و یکی از سطح‌های تراز L_A و یکی از سطح‌های تراز $L_{A'}$ با یکدیگر برابرند.
فرض کنید $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}$ پایه‌ای برای هسته این دو نگاشت باشد که آن را به پایه $\alpha = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ برای F^n گسترش داده‌ایم.

$u_1 = L_A(v_1), \ldots, u_{n-k} = L_A(v_{n-k})$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} L_A$ است. آن را به پایه‌ای مانند $\beta = \{u_1, \ldots, u_{n-k}, u_{n-k+1} \ldots, u_m\}$ برای F^m گسترش می‌دهیم.

همچنین $u'_1 = L_{A'}(v_1), \ldots, u'_{n-k} = L_{A'}(v_{n-K})$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im} L_{A'}$ است. آن را نیز به پایه‌ای مانند $\beta' = \{u'_1, \ldots, u'_{n-k}, u'_{n-k+1} \ldots, u'_m\}$ برای F^m گسترش می‌دهیم. نگاشت خطی وارون‌پذیر $S : F^m \to F^m$ را که پایه مرتب β را به پایه مرتب β' می‌نگارد در نظر بگیرید. بنابراین

$$S(u_1) = u'_1, \quad \ldots \quad , S(u_m) = u'_m$$

نگاشت خطی SL_A برابر $L_{A'}$ است زیرا اثر این دو نگاشت روی پایه α برابر است. در نتیجه در پایه‌های استاندارد F^n و F^m داریم

$$A' = [L_{A'}] = [SL_A] = [S] \cdot [L_A] = [S] \cdot A$$

از آنجا که S یک نگاشت وارون‌پذیر است $P = [S]$ یک ماتریس وارون‌پذیر خواهد بود که برای آن داریم $A' = PA$. اگر X_0 یک جواب دستگاه $AX = b$ باشد، X_0 جوابی برای دستگاه $A'X = b'$ نیز است بنابراین

$$b' = A'X_0 = (PA)X_0 = P(AX_0) = Pb$$

بنابراین دو دستگاه $AX = b$ و $A'X = b'$ هم‌ارز هستند.

حال فرض کنید $A = [T]_\beta^\alpha$. با انجام اعمال پایه‌ای مقدماتی روی پایه β، روی ماتریس نمایش $[T]_\beta^\alpha$ اعمال سطری مقدماتی انجام می‌شود. اگر سطرهای A را به عنوان بردارهایی در F^n در نظر بگیریم آنگاه با انجام اعمال بالا فضای تولید شده توسط آنها تغییر نمی‌کند. همچنین بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های این ماتریس نیز تغییر نمی‌کند و در واقع این مقدار برابر بعد تصویر نگاشت خطی T است. از طرفی با انجام این اعمال می‌توانیم به نمایش ماتریسی ساده سطری برای T برسیم. در یک ماتریس ساده سطری واضح است که بعد فضای تولید شده توسط سطرها و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌ها هر دو برابر r هستند. بنابراین بعد فضای تولید شده توسط سطرهای A و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن با هم برابر هستند. توجه کنید که فضای تولید شده توسط سطرها در F^n و فضای تولید شده توسط ستون‌ها در F^m قرار دارد و کاملاً با یکدیگر متفاوت اند. ولی بعد آنها با هم برابر است.

قضیه. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس و بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن با هم برابرند.

تا کنون همه جا ماتریس، نمایشی برای یک نگاشت خطی بود و هر ویژگی آن متناظر ویژگی‌ای برای نگاشت خطی متناظر بود. اما به نظر می‌رسد که این ویژگی اخیر ماتریس‌ها متناظر ویژگی‌ای برای نگاشت‌های خطی نیست. اما در فصل قبل دیدیم که این ویژگی ماتریس‌ها از این نکته نتیجه می‌شود که بعد تصویر یک نگاشت خطی با بعد ترانهاده آن نگاشت خطی برابر است. به بعد فضای تولید شده توسط سطرهای ماتریس A یا بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن *رتبه* آن ماتریس می‌گوییم و آن را با نماد $rank(A)$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که $rank(A)$ در واقع بعد تصویر نگاشت خطی‌ای است که نمایش آن ماتریس A است. به عبارت دیگر $rank([T]_\beta^\alpha) = \dim \operatorname{Im}(T)$. به همین سبب معمولاً به بعد تصویر یک نگاشت خطی *رتبه آن نگاشت خطی* نیز گفته می‌شود. بنابراین $rank(T) := rank([T]_\alpha^\beta) = \dim \operatorname{Im}(T)$.

تمرین. یک ماتریس را با رتبه کامل می‌گوییم هرگاه رتبه آن در بین ماتریس‌های هم اندازه خود بیشترین مقدار را داشته باشد. بنابراین یک ماتریس $m \times n$ با رتبه کامل است اگر و تنها اگر رتبه آن برابر $\min\{m,n\}$ باشد. نشان دهید یک ماتریس با رتبه کامل است اگر و تنها اگر با حذف تعدادی سطر و یا با حذف تعدادی ستون، به یک ماتریس وارون‌پذیر تبدیل شود.

تمرین. یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر با ماتریس همانی هم‌ارز باشد. وارون آن هم با انجام همان اعمال سطری مقدماتی که برای تبدیل آن ماتریس به همانی لازم است روی ماتریس همانی بدست می‌آید.

تمرین. فرض کنید A و B دو ماتریس ساده سطری اند که با هم هم‌ارز سطری نیز هستند. نشان دهید $A = B$.

خلاصه مطالب

در این قسمت نکاتی راجع به دستگاه‌های خطی بیان شد که می‌تواند در حل آنها مفید باشد. خلاصه‌ای از این مطالب در زیر ارائه می‌شود.

۱. دستگاه $AX = b$ کاملاً از روی ماتریس $[A \mid b]$ مشخص می‌شود. به این ماتریس، ماتریس افزوده دستگاه $AX = b$ می‌گوییم. قسمت اول آن همان ماتریس ضرایب دستگاه است.

۲. با انجام اعمال زیر روی ماتریس افزوده یک دستگاه مجموعه جواب‌های آن تغییر نمی‌کند.

الف. جابجا کردن دو سطر.

ب. ضرب کردن یک اسکالر ناصفر در یک سطر.

ج. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

به این اعمال که روی سطرهای یک ماتریس انجام می‌شود اعمال سطری مقدماتی می‌گوییم. دو ماتریس را که به این صورت به هم تبدیل شوند هم‌ارز سطری می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه M و N هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.

دستگاه‌های $AX = b$ و $A'X = b'$ را هم‌ارز گوییم هرگاه ماتریس افزوده آنها هم‌ارز سطری باشند. بنابراین دو دستگاه هم‌ارز دارای مجموعه جواب‌های یکسانی هستند.

۳. برای هر عمل سطری مقدماتی روی ماتریس‌های $m \times n$ ماتریس وارون‌پذیر mتایی E وجود دارد که EA برابر است با انجام آن عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A است. بنابراین E برابر است با حاصل آن عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی mتایی.

۳. دو دستگاه هم اندازه $AX = b$ و $A'X = b'$ که دارای جواب باشند و مجموعه جواب‌های آنها یکسان باشد هم‌ارز اند.

۴. هر دستگاه $AX = b$ با دستگاه $A'X = b'$ هم‌ارز است که در آن A' ماتریسی ساده سطری است. جواب‌های دستگاه $A'X = b'$ به سادگی قابل بیان است.

۵. بعد فضای تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس برابر بعد فضای تولید شده توسط ستون‌های آن است. به این عدد رتبه آن ماتریس می‌گوییم. رتبه یک نگاشت خطی را نیز برابر بعد تصویر آن تعریف می‌کنیم. بنابراین $rank(T) = rank([T]_\alpha^\beta) = \dim \operatorname{Im}(T)$

۶. ماتریس‌های وارون‌پذیر حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی هستند. به عبارت یک ماتریس وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر هم‌ارز سطری با ماتریس همانی باشد.

حل دستگاه‌های خطی

در قسمت قبل دو نکته راجع به یک دستگاه خطی بیان شد که می‌توان به کمک آنها دستگاه را حل کرد. در این قسمت این دو نکته به صورتی مستقل و به گونه‌ای ارائه می‌شوند که روش عملی برای حل دستگاه خطی بدست آید.

نکته ۱. مجموعه جواب‌های دستگاه خطی $AX = b$ با انجام اعمال زیر روی ماتریس $[A \mid b]$ نغییر نمی‌کند.

الف. جابجا کردن دو سطر

ب. ضرب کردن یک اسکالر ناصفر در یک سطر.

ج. جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

نکته ۲. هر دستگاه $AX = b$ را می‌توان با اعمال بالا به دستگاه $A'X = b'$ تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست می‌آید.

دستگاه $AX = b$ را در نظر بگیرید که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

این دستگاه به شکل مجموعه معادلات زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

می‌توان روی این معادلات سه عمل زیر را انجام داد که جواب‌های این مجموعه معادلات تغییر نکند.

الف. جابجا کردن دو معادله iام و jام.

ب. ضرب کردن اسکالر ناصفر r در معادله iام.

ج. جمع کردن r برابر معادله iام با معادله jام.

واضح است که این اعمال بازگشت پذیر هستند. بنابراین مجموعه معادلات ایجاد شده از این تغییرات به نوعی با مجموعه معادلات اول معادل است و مجموعه جواب‌های آنها یکسان است. هر یک از اعمال بالا تغییرات زیر را روی دستگاه خطی $AX=b$ ایجاد می‌کنند.

الف. دو سطر iام و jام ماتریس A و همچنین ستون b جابجا می‌شوند.

ب. سطر iام ماتریس A و همچنین ستون b در عدد ناصفر r ضرب می‌شود.

ج. r برابر سطر iام ماتریس A با سطر jام ماتریس A جمع می‌شود. همچنین r برابر سطر iام ستون b با r برابر سطر jام ستون b جمع می‌شود.

اگر ستون b را به ماتریس A اضافه کنیم ماتریسی $m\times(n+1)$ تایی $[A\,|\,b]$ ایجاد می‌شود که کاملاً دستگاه $AX=b$ را مشخص می‌کند و اعمال بالا چیزی جز اعمال زیر روی این ماتریس نیستند.

الف. جابجا کردن دو سطر iام و jام.

ب. ضرب کردن اسکالر ناصفر r در سطر iام.

ج. جمع کردن r برابر سطر iام با سطر jام.

به این اعمال که روی سطرهای یک ماتریس انجام می‌شود *اعمال سطری مقدماتی* می‌گوییم. دو ماتریسی را که با انجام تعدادی اعمال سطری مقدماتی به هم تبدیل می‌شوند *هم‌ارز سطری* می‌گوییم. به این ترتیب دو ماتریس هم اندازه M و N هم‌ارز سطری اند اگر و تنها اگر فضای تولید شده توسط سطرهای آنها برابر باشند.

به ماتریس $[A\,|\,b]$ *ماتریس افزوده* دستگاه $AX=b$ می‌گوییم. *دستگاه‌های خطی* $AX=b$ و $A'X=b'$ *را هم‌ارز* گوییم هرگاه ماتریس افزوده آنها هم‌ارز سطری باشند. بنابراین دو دستگاه هم‌ارز دارای مجموعه جواب‌های یکسانی هستند.

نشان می‌دهیم که با اعمال بالا می‌توان دستگاه خطی را به دستگاهی ساده تبدیل کرد که جواب‌های آن به سادگی بدست آیند.

دستگاه‌های خطی خاص

ساده‌ترین دستگاه خطی دستگاهی است که هر سطر ناصفر آن تنها یک درایه ناصفر داشته باشد و آن هم برابر ۱ باشد. با جابجا کردن سطرهای این دستگاه خطی می‌توان فرض کرد که سطرهای صفر همگی زیر سطرهای ناصفر باشند. اگر ماتریس ضرایب چنین دستگاهی دارای r سطر ناصفر باشد و درایه ناصفر سطر sام نیز در ستون p_sام باشد آنگاه معادلات متناظر با این دستگاه به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} x_{p_1} &= b_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b_m \end{aligned}$$

اگر $p_1, \dots, p_r$ متمایز باشند آنگاه شرط لازم و کافی برای وجود جواب برای این معادلات این است که $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ و در صورتی که این شرط برقرار باشد متغیرهای $x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$ به صورت یکتا بدست می‌آیند. مقدار بقیه متغیرها نیز مهم نیست، یعنی هر مقداری را می‌توان برای آنها در نظر گرفت. البته چنین دستگاهی خیلی ساده است و به ندرت با چنین دستگاهی مواجه می‌شویم.

اکنون اجازه می‌دهیم کمی دستگاه پیچیده‌تر باشد. فرض کنید ماتریس ضرایب دستگاه خطی دارای r سطر ناصفر است که همگی بالای سطرهای صفر آن قرار دارند. مانند قبل فرض کنید که r ستون $p_1, \dots, p_r$ وجود دارند که هر یک تنها یک درایه ناصفر دارند و مقدار آن هم برابر ۱ است. به علاوه درایه‌های ناصفر این ستون‌ها در سطرهای مختلف قرار دارند. با جابجا کردن سطرها می‌توان فرض کرد که درایه ناصفر ستون p_sام در سطر sام قرار داشته باشد.

$$A = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} * & \cdots & * & \overset{\overset{p_1}{\downarrow}}{1} & * & \cdots & * & \overset{\overset{p_{r-1}}{\downarrow}}{0} & * & \cdots & * & \overset{\overset{p_r}{\downarrow}}{0} & * & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \\ * \end{array}}\right\} r \\ \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \end{array}} \end{array}$$

مجموعه معادلات متناظر این دستگاه به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \sum_{j \notin \{p_1, \dots, p_r\}} a_{1j} x_j &= b_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} + \sum_{j \notin \{p_1, \dots, p_r\}} a_{rj} x_j &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b_m \end{aligned}$$

توجه کنید که در هر یک از r معادله اول تنها یکی از متغیرهای $x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$ ظاهر می‌شود. بنابراین شرط لازم و کافی برای وجود جواب چنین دستگاهی نیز $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ است و در صورت برقرار بودن این شرط مقدار متغیرهای $x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$ به صورت یکتا از روی مقادیر دیگر متغیرها بدست می‌آید. در این دستگاه نیز می‌توان هر مقداری را برای متغیرهای x_j که $j \notin \{p_1, \dots, p_r\}$ انتخاب کرد و جواب از روی آن به صورت یکتا بدست می‌آید. بنابراین جواب‌های چنین دستگاهی نیز به سادگی بدست می‌آیند.

حال نوع دیگری از دستگاه‌های خطی خاص را در نظر می‌گیریم.

ماتریس A را *پلکانی* می‌گوییم هرگاه سطرهای ناصفر آن بالای سطرهای صفر قرار داشته باشند و اولین درایه ناصفر هر یک بعد از اولین درایه ناصفر سطر قبلی قرار داشته باشد. اولین درایه ناصفر یک سطر را در یک ماتریس *درایه پیشرو* آن سطر می‌گوییم. به این ترتیب سطرهای صفر یک ماتریس دارای درایه پیشرو نیستند. با این تعریف ماتریس A با r سطر ناصفر پلکانی است هرگاه سطرهای ناصفر آن همان سطرهای اول تا rام آن باشند و اگر درایه پیشرو سطر sام در ستون p_sام قرار داشته باشد آنگاه $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. در زیر ماتریس اول پلکانی است ولی بقیه پلکانی نیستند.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب‌های دستگاهی که ماتریس ضرایب آن یک ماتریس پلکانی است نیز به سادگی بدست می‌آیند. شاید شما روش عملی ساده‌ای برای بدست آوردن جواب‌های چنین دستگاهی در نظر داشته باشید. اما با چند عمل سطری مقدماتی ساده روی یک دستگاه با ماتریس ضرایب پلکانی می‌توان آن را به دستگاه خطی از نوع قبل تبدیل کرد.

دو نوع عمل سطری مقدماتی زیر را روی یک ماتریس پلکانی در نظر بگیرید.

۱. ضرب کردن یک سطر ماتریس پلکانی در عددی ناصفر. با این عمل ماتریس حاصل همچنان پلکانی باقی می‌ماند و جای درایه‌های پیشرو آن نیز عوض نمی‌شود.

۲. جمع کردن مضربی از یک سطر با یک سطر بالاتر. با این عمل در یک ماتریس پلکانی ماتریس حاصل همچنان پلکانی است. به‌علاوه هم جای درایه‌های پیشرو و هم مقدار آنها تغییر نمی‌کند.

بنابراین با انجام اعمال از نوع اول می‌توان فرض کرد که درایه‌های پیشرو ماتریس پلکانی برابر ۱ هستند و با انجام اعمال نوع دوم می‌توان فرض کرد که هر درایه دیگری که در ستون یک درایه پیشرو قرار دارد برابر صفر است.

به ماتریس پلکانی که مقدار درایه‌های پیشرو آن برابر ۱ است و هر درایه دیگری که در ستون یک درایه پیشرو قرار دارد برابر صفر است، ماتریس *ساده سطری* می‌گوییم.

به این ترتیب می‌توان دستگاهی با ماتریس ضرایب پلکانی را به دستگاهی با ماتریس ضرایب ساده سطری تبدیل کرد. فرض کنید A' ماتریسی ساده سطری با r سطر ناصفر باشد که درایه‌های پیشرو سطرهای آن در ستون‌های $p_1, \ldots, p_r$ قرار داشته باشند.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad p_1 \qquad\qquad p_2 \qquad\qquad p_3 \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \end{array}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

مجموعه معادلات متناظر با دستگاه $A'X = b'$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{1j} x_j &= b'_1 \\ &\vdots \\ x_{p_r} + \sum_{j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}} a'_{rj} x_j &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه $A'X = b'$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$. در این صورت مقادیر x_j را برای $j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$ می‌توان آزادانه انتخاب کرد و از روی آن مقادیر $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ به صورت یکتا مشخص می‌شوند.

در این مثال‌ها متغیرهای $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$ را *متغیرهای وابسته* و بقیه متغیرها را *متغیرهای آزاد* می‌نامیم.

مثال.

....

روش حل دستگاه خطی دلخواه

هدف این قسمت این است که دستگاه دلخواه $AX=b$ را با انجام اعمال سطری مقدماتی به دستگاهی مانند $A'X=b'$ تبدیل کنیم که در آن A' ماتریسی پلکانی باشد. از آنجا که دستگاه‌های خطی با ماتریس ضرایب پلکانی به راحتی حل می‌شوند، در صورتی که بتوان این کار را انجام داد جواب‌های دستگاه خطی اول نیز به سادگی بدست می‌آیند.

فرض کنید اولین ستون ناصفر A ستون p_1 باشد. با جابجایی سطرها می‌توان فرض کرد که a_{1p_1} ناصفر است. با جمع کردن مضارب مناسب سطر اول با دیگر سطرها، می‌توان بقیه درایه‌های ستون p_1ام را صفرکرد. بنابراین درایه‌های پیشرو دیگر سطرها در ستون‌های بعد از ستون p_1ام قرار می‌گیرند و در صورتی که روی بقیه سطرها اعمال سطری مقدماتی انجام دهیم این درایه‌های پیشرو همچنان در ستون‌های بعد از ستون p_1ام قرار خواهند داشت. بنابراین می‌توانیم سطر اول را نادیده بگیریم و سعی کنیم ماتریس حاصل از حذف سطر اول را با اعمال سطری مقدماتی پلکانی کنیم. در صورتی که این کار ممکن باشد ماتریس اصلی نیز پلکانی خواهد شد.

این روند را می‌توان به صورت استقرایی روی ماتریس کوچک‌تر حاصل از حذف سطر اول انجام داد. به این ترتیب بعد از چند مرحله به ماتریس صفر یا ماتریسی با یک سطر می‌رسیم که به روشنی پلکانی هستند.

مثال‌ها

....

---

۶. حجم و دترمینان

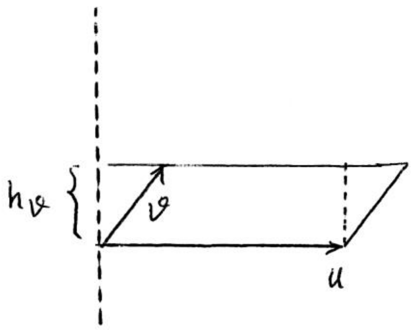
همه مطالب این فصل برای فضاهای برداری با بعد متناهی بیان می‌شود.

حجم در فضای برداری

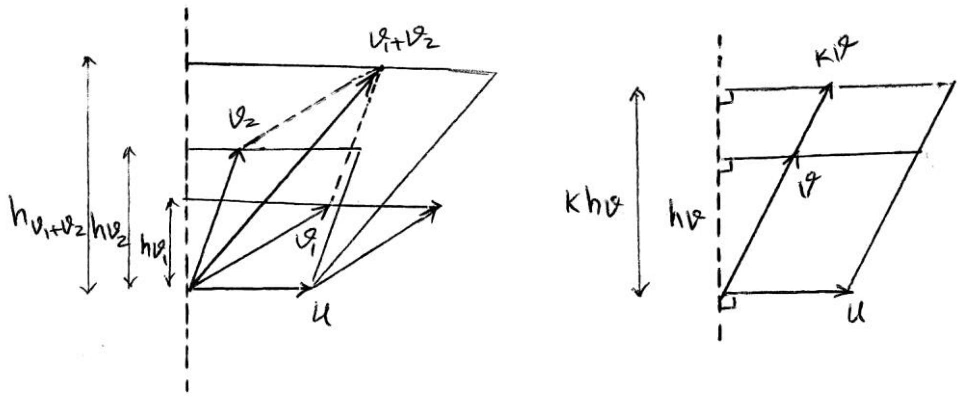
در این قسمت سعی داریم مفهوم حجم را برای فضاهای برداری با بعد متناهی معرفی کنیم. برای این منظور مفهوم مساحت در صفحه و حجم معمولی در فضای سه بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ارتباط آنها را با ساختار جبری روی این فضاها بدست می‌آوریم. خواهیم دید که به کمک این ارتباط می‌توانیم مفهوم حجم را برای همه فضاهای برداری با بعد متناهی گسترش دهیم.

مساحت در صفحه دو بعدی

دو بردار u و v در $\mathbb{R}^2$ یک متوازی الاضلاع مشخص می‌کنند. از هندسه مقدماتی می‌دانیم مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول یک ضلع در ارتفاع وارد بر آن.



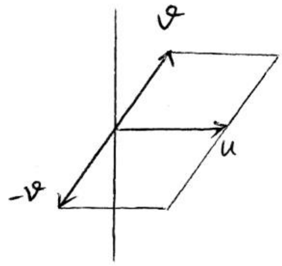
مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v را با $S(u,v)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $S(u,v)$ برابر است با حاصل ضرب طول بردار u در طول تصویر بردار v روی خط عمود بر u. با توجه به دو شکل زیر به نظر می‌آید که تابع $S(u,v)$ نسبت به v (و به صورت مشابه نسبت به u) نگاشتی خطی است.



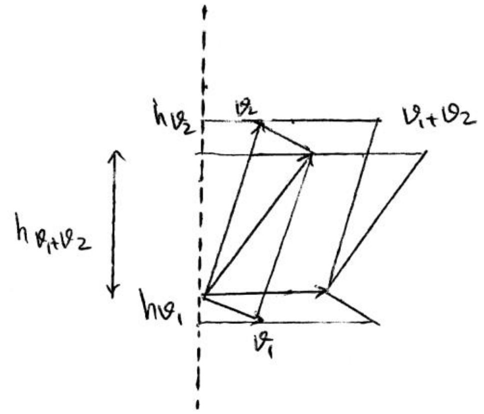
$$h_{v_1+v_2} = h_{v_1} + h_{v_2} \quad \Rightarrow$$
$$S(u, v_1 + v_2) = S(u,v_1) + S(u,v_2)$$

$$S(u,kv) = kS(u,v)$$

البته این گزاره درست نیست. زیرا اثبات‌های بالا که مبتنی بر شکل اند، در حالت های زیر دچار مشکل می‌شود.

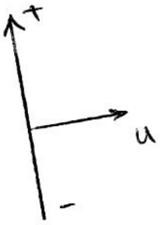


$S(u,-v) = S(u,v)$



$S(u,v_1+v_2) = S(u,v_2) - S(u,v_1)$

ولی اگر اجازه دهیم طول تصویر یک بردار روی خط عمود بر u منفی نیز باشد این مشکل حل می‌شود. با انتخاب یک جهت روی خط عمود بر u، تصویر هر برداری روی آن با یک عدد حقیقی متناظر می‌شود و $S(u,v)$ را می‌توان برابر حاصل ضرب آن عدد در طول بردار u تعریف کنیم. در اینجا قرارداد می‌کنیم که نیم خط سمت چپ بردار u قسمت مثبت باشد.



به‌این ترتیب اگر v سمت چپ بردار u باشد $S(u,v)$ برابر مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v است و در غیر این صورت $S(u,v)$ برابر منفی مساحت آن متوازی الاضلاع است. دقت کنید که به صورت کاملاً مشابه $S(u,v)$ نسبت به متغیر اول نیز یک نگاشت خطی است. بنابراین

۱. تابع $S:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

۲. برای هر بردار u، $S(u,u)=0$

قضیه. تابع $S:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با دو ویژگی بالا، صرف نظر از یک ضریب یکتا است.

اثبات. ابتدا دقت کنید که برای هر دو بردار u و v داریم $S(u,v)=-S(v,u)$. زیرا

$$\begin{aligned} 0 &= S(u+v,u+v) = S(u,u+v) + S(v,u+v) \\ &= S(u,u) + S(u,v) + S(v,u) + S(v,v) \\ &= S(u,v) + S(v,u) \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\{e_1,e_2\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ باشد و

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 \qquad v = b_1e_1 + b_2e_2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S(u,v) &= S\left(a_1e_1+a_2e_2, b_1e_1+b_2e_2\right) \\ &= a_1b_1S(e_1,e_1)+a_1b_2S(e_1,e_2)+a_2b_1S(e_2,e_1)+a_2b_2S(e_2,e_2) \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)S(e_1,e_2) \end{aligned}$$

در نتیجه $S(u,v)=C.(a_1b_2-a_2b_1)$. توجه کنید که این توابع دارای دو ویژگی مورد نظر نیز هستند. بنابراین مساحت جهت داری که در بالا معرفی کردیم باید به همین صورت باشد. اگر $\{e_1,e_2\}$ پایه استاندارد باشد برای آن داریم $S(e_1,e_2)=1$. قضیه بالا اثبات دیگری برای این نکته ارائه می‌دهد که مساحت جهت دار مثلثی با رأس‌های مبدأ، (a_1,a_2) و (b_1,b_2) برابر است با $\frac{1}{2}(a_1b_2-a_2b_1)$.

حجم در فضای سه بعدی

سه بردار u و v و w در $\mathbb{R}^3$ یک متوازی السطوح مشخص می‌کنند که حجم آن را با $S(u,v,w)$ نمایش می‌دهیم. از هندسه می‌دانیم که $S(u,v,w)$ برابر است با حاصل ضرب مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار u و v در ارتفاع وارد بر آن (که همان طول تصویر بردار w روی خط عمود بر صفحه تولید شده توسط u و v است).
همانند مساحت در صفحه دو بعدی برای اینکه $S(u,v,w)$ نسبت به w خطی باشد باید حجم جهت دار را با انتخاب جهت مناسب روی خط عمود بر صفحه تولید شده توسط u و v معرفی کنیم. این کار را به کمک قاده دست راست در $\mathbb{R}^3$ انجام می‌دهیم. به‌این ترتیب $S(u,v,w)$ را برابر حجم متوازی السطوح تولید شده با بردارهای u و v و w تعریف می‌کنیم به شرط اینکه با حرکت پیوسته انگشتان دست راست از u به v، بردار w در نیم فضایی قرار بگیرد که با شصت دست راست مشخص می‌شود. در غیر این صورت $S(u,v,w)$ منفی حجم آن متوازی السطوح است. با این قرارداد واضح است که $S(u,v,w)$ نسبت به هر یک از مولفه های خود خطی است. بنابراین

۱. تابع $S:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

۲. اگر دو تا از بردارهای u و v و w برابر باشند آنگاه $S(u,v,w)=0$. (زیرا متوازی السطوح تولید شده در یک صفحه قرار خواهد گرفت و دیگر حجمی نخواهد داشت.)

قضیه. تابع $S:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ با دو ویژگی بالا، صرف نظر از یک ضریب یکتا است.

اثبات. مانند حالت دو بعدی دقت می‌کنیم که اگر جای دو تا از بردارهای u و v و w عوض شود مقدار S منفی می‌شود. یعنی

$$S(u,w,v)=S(v,u,w)=S(w,u,v)=-S(u,v,w)$$

زیرا

$$\begin{aligned} 0 = S\left(u+v,u+v,w\right) &= S(u,u,w)+S(u,v,w)+S(v,u,w)+S(v,v,w) \\ &= S(u,v,w)+S(v,u,w) \end{aligned}$$

بقیه حالت ها نیز به صورت مشابه است.
حال اگر $\{e_1,e_2,e_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد و

$$u=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 \qquad v=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3 \qquad w=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$$

آنگاه

$$S(u,v,w)=\sum_{i,j,k=1}^{3}a_ib_jc_kS(e_i,e_j,e_k)$$

در مجموع بالا بسیاری از جمله ها که دارای بردار تکراری است صفر خواهند بود، در نتیجه

$$
\begin{aligned}
S(u,v,w) &= a_1b_2c_3S\big(e_1,e_2,e_3\big) + a_1b_3c_2S\big(e_1,e_3,e_2\big) + a_2b_1c_3S\big(e_2,e_1,e_3\big) \\
&\quad + a_2b_3c_1S\big(e_2,e_3,e_1\big) + a_3b_1c_2S\big(e_3,e_1,e_2\big) + a_3b_2c_1S\big(e_3,e_2,e_1\big) \\
&= \big(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\big)S(e_1,e_2,e_3)
\end{aligned}
$$

با توجه به اثبات بالا حجم جهت‌داری که در ابتدای این قسمت معرفی شد نیز باید به صورت بالا باشد. اگر $\{e_1,e_2,e_3\}$ پایه استاندارد باشد برای آن داریم $S(e_1,e_2,e_3)=1$. گزاره بالا اثبات دیگری برای این نکته است که حجم جهت دار هرمی با رأس‌های مبدأ، (a_1,a_2,a_3)، (b_1,b_2,b_3) و (c_1,c_2,c_3) برابر است با

$$
\frac{1}{6}\big|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\big|
$$

زیرا متوازی السطوح تولید شده با این سه بردار به شش هرم هم حجم با هرم بالا افراز می‌شود.

حجم در یک فضای برداری n بعدی

در قسمت های قبل دیدیم که مساحت جهت‌دار $\mathbb{R}^2$ و حجم جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ تابع‌هایی اند که صرف نظر از یک ضریب با دو ویژگی زیر به صورت یکتا مشخص می‌شوند.

۱. نسبت به هر مولفه خطی اند.

۲. اگر دو بردار برابر باشند مقدارشان صفر می‌شود.

از آنجایی که این دو شرط کاملاً جبری هستند به راحتی می‌توانیم مفهوم مساحت و حجم را برای یک فضای برداری دلخواه اما با بعد متناهی گسترش دهیم.

در یک فضای n بعدی *حجم متناظر با بردارهای* $v_1,\ldots,v_n$، تابعی است از این n بردار که نسبت به هر مؤلفه خطی باشد و اگر دو تا از این بردارها با هم برابر باشند برابر صفر شود. به عبارت دیگر

تعریف. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F باشد. تابع $S:V^n\to F$ یک *حجم n بعدی روی* V نامیده می‌شود اگر

۱. نسبت به هر یک از مؤلفه‌های خود خطی باشد. یعنی

$$
S(\ldots,v_i+rv_i',\ldots)=S(\ldots,v_i,\ldots)+rS(\ldots,v_i',\ldots)
$$

۲. اگر دو تا از بردارهای $v_1,\ldots,v_n$ برابر باشند آنگا $S(v_1,\ldots,v_n)=0$.

توجه کنید که بردارهای $v_1,\ldots,v_n$ در یک فضای برداری حقیقی n بعدی یک متواضی السطوح را مشخص می‌کنند و تابع حجم بیان شده در واقع حجم این متوازی السطوح است. در قسمت‌های بعد نشان می‌دهیم که برای فضاهای برداری حقیقی می‌توان این حجم را برای بسیاری از شکل‌ها گسترش داد و بنابراین مفهوم حجم در این فضاها کاملاً با شهود ما از مساحت در صفحه و حجم در فضای سه بعدی مطابقت دارد. این در حالی است که در یک فضای برداری غیر حقیقی چیزی شبیه متوازی السطوح که با n بردار مشخص شود وجود ندارد و بنابراین مفهوم حجم در این فضاها خیلی با شهود ما از حجم سازگار نیست و تابع حجم تنها یک تابعی است که به n بردار یک اسکالر در میدان F نسبت می‌دهد که چون میدان F میدان اعداد حقیقی نیست حجم مشخص شده با n بردار حتی یک عدد حقیقی هم نیست. با این حال از ویژگی‌های جبری تابع حجم در این فضاها می‌توان استفاده‌های زیادی کرد که در فصل‌های بعد برخی از آنها را می‌بینیم.

چند ویژگی ساده تابع حجم

قضیه. فرض کنید $S:V^n\to F$ یک تابع حجم روی V باشد. آنگاه

۱. (پاد متقارن بودن) با جابجا کردن دو بردار مقدار S منفی می‌شود. به عبارت دیگر

$$S(\ldots,u,\ldots,v,\ldots) = -S(\ldots,v,\ldots,u,\ldots)$$

۲. با ضرب کردن یکی از بردارهای $v_1,\ldots,v_n$ در r مقدار S نیز r برابر می‌شود. به عبارت دیگر

$$S(\ldots,rv,\ldots) = rS(\ldots,v,\ldots)$$

۳. با جمع کردن مضربی از یک بردار با برداری دیگر حجم بردارها تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر

$$S(\ldots,v_i,\ldots,v_j + rv_i,\ldots) = S(\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots)$$

۴. $S(\ldots,0,\ldots) = 0$.

۵. اگر $v_1,\ldots,v_n$ پایه برای V نباشد آنگاه $S(v_1,\ldots,v_n) = 0$.

۶. اگر S تابع صفر نباشد آنگاه مقدار آن روی هر پایه V ناصفر است.

اثبات. (۱) با توجه به دو ویژگی تابع حجم داریم

$$\begin{aligned} 0 &= S(\ldots,u+v,\ldots,u+v,\ldots) \\ &= S(\ldots,u,\ldots,u,\ldots) + S(\ldots,u,\ldots,v,\ldots) \\ &\quad + S(\ldots,v,\ldots,u,\ldots) + S(\ldots,v,\ldots,v,\ldots) \\ &= S(\ldots,u,\ldots,v,\ldots) + S(\ldots,v,\ldots,u,\ldots) \end{aligned}$$

(۲) نتیجه مستقیم خطی بودن S نسبت به هر مولفه است.

(۳) با توجه به دو ویژگی تابع حجم داریم

$$\begin{aligned} S(\ldots,v_i,\ldots,v_j + rv_i,\ldots) &= S(\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots) + rS(\ldots,v_i,\ldots,v_i,\ldots) \\ &= S(\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots) \end{aligned}$$

(۴) نتیجه مستقیم خطی بودن S نسبت به هر مولفه است.

(۵) اگر $\{v_1,\ldots,v_n\}$ پایه برای V نباشد آنگاه وابسته خطی است و در نتیجه یکی از اعضای آن را می‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای دیگر نوشت. فرض کنید $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ در این صورت با توجه به خطی بودن S نسبت به مولفه اول داریم

$$S(v_1,\ldots,v_n) = a_2S(v_2,v_2,\ldots,v_n) + \cdots + a_nS(v_n,v_2,\ldots,v_n)$$

از آنجا که در هر یک از جمله‌های بالا دو بردار تکراری وجود دارد همه جمله‌ها برابر صفر اند و در نتیجه

$$S(v_1,\ldots,v_n) = 0$$

(۶) می‌دانیم که با انجم اعمال مقدماتی می‌توان از هر پایه به هر پایه دیگر رسید. بنابر ویژگی‌های (۱)، (۲) و (۳) با انجام هر عمل مقدماتی صفر بودن S تغییری نمی‌کند؛ زیرا مقدار S در عددی ناصفر (که می‌تواند یک یا منفی یک نیز باشد) ضرب می‌شود. در نتیجه مقدار S یا روی همه پایه‌ها صفر است و یا روی همه پایه‌های ناصفر است. به این ترتیب و با توجه به قسمت قبل یا S تابع صفر است و یا اینکه مقدار آن روی همه پایه‌ها ناصفر است.

قضیه. فرض کنید تابع $S : V^n \to F$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است. در این صورت اگر مشخصه میدان F برابر ۲ نباشد (یعنی اگر $1 + 1 \neq 0$) آنگاه گزاره‌های زیر معادل اند.

الف. اگر دو تا از بردارهای $v_1,\ldots,v_n$ برابر باشند آنگاه $S(v_1,\ldots,v_n) = 0$.

ب. (پاد متقارن بودن). با جابجا کردن دو بردار مقدار S قرینه می‌شود. به عبارت دیگر

$$S(\ldots,u,\ldots,v,\ldots) = -S(\ldots,v,\ldots,u,\ldots)$$

ج. برای هر n بردار $v_1,\ldots,v_n$ و هر اسکالر r

$$S(\ldots,v_i,\ldots,v_j + rv_i,\ldots) = S(\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots)$$

اثبات. (الف $\Leftarrow$ ب و ج) قضیه قبل.

(ب $\Leftarrow$ الف) با توجه به اینکه مشخصه میدان F برابر ۲ نیست، یعنی $1+1=2\neq 0$، داریم

$$\begin{aligned}&S(\ldots,u,\ldots,u,\ldots) = -S(\ldots,u,\ldots,u,\ldots)\\ &\quad\Rightarrow 2S(\ldots,u,\ldots,u,\ldots)=0 \quad\Rightarrow\quad S(\ldots,u,\ldots,u,\ldots)=0\end{aligned}$$

(ج $\Leftarrow$ الف) کافی است از خطی بودن S نسبت به مولفه‌هایش در تساوی قسمت (ج) استفاده کنیم.

قضیه بالا زمانی که مشخصه میدان ۲ است درست نیست. اما مشخصه بسیاری از میدان‌های معروف و متداول مانند میدان اعداد حقیقی و یا مختلط مخالف ۲ است. در این موارد چون شرط پاد متقارن بودن (شرط ب) ساده‌تر بیان می‌شود و به روشنی نیز گزاره (الف) را نتیجه می‌دهد می‌توان در تعریف حجم n بعدی از شرط (ب) بجای (الف) استفاده کرد. اما باید دقت داشت که این تعریف زمانی که مشخصه میدان برابر ۲ است مفید نیست.

تا اینجا برخی از ویژگی‌های ابتدایی تابع حجم بیان شد. اما هنوز معلوم نیست که آیا اصلاً تابع حجم ناصفر وجود دارد یا خیر. در قسمت‌های قبل دیدیم که $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ دارای چنین تابعی هستند و همه توابع حجم روی آنها نیز مضربی از یکدیگر اند. این موضوع را باید برای فضاهای برداری دیگر نیز بررسی کنیم.

فرض کنید $\{e_1,\ldots,e_n\}$ یک پایه برای V و $v_1,\ldots v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_1,\ldots,e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j = a_j^1 e_1 + a_j^2 e_2 + \cdots + a_j^n e_n \qquad j=1,\ldots,n$$

در این صورت

$$S(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$

که σ تابعی دلخواه از مجموعه $\{1,\ldots,n\}$ به خودش است. اما از آنجا که اگر دو تا از بردارها با هم برابر باشند مقدار S صفر می‌شود جملاتی که در آن تابع σ یک به یک و پوشا نیست صفر خواهند بود. تابع یک به یک و پوشا از $\{1,\ldots,n\}$ به خودش یک جایگشت این مجموعه نامیده می‌شود و مجموعه همه جایگشت‌های $\{1,\ldots,n\}$ را با S^n نمایش می‌دهند. توجه کنید که یک جایگشت σ کاملاً با مجموعه مرتب $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ مشخص می‌شود و این مجموعه همان مجموعه $\{1,\ldots,n\}$ است اما با یک ترتیب متفاوت. بنابراین

$$S(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\sigma\in S^n} a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$$

در بالا $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$ همان $(e_1,\ldots,e_n)$ اما با ترتیبی متفاوت است. بنابراین با جابجایی اعضای آن می‌توان به مجموعه مرتب $(e_1,\ldots,e_n)$ رسید و در نتیجه $S(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) = \pm S(e_1,\ldots,e_n)$. در واقع اگر بتوان با زوج تا جابجایی از $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$ به $(e_1,\ldots,e_n)$ رسید خواهیم داشت $S(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) = S(e_1,\ldots,e_n)$ و در غیر این صورت $S(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) = -S(e_1,\ldots,e_n)$. توجه کنید که روش‌های زیادی از جابجایی‌ها مجموعه مرتب $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_1,\ldots,e_n)$ تبدیل می‌کند و ما در اینجا لازم داریم که در همه این روش‌ها زوجیت تعداد جابجایی‌ها یکسان باشد. زیرا اگر هم بتوان با زوج جابجایی مجموعه مرتب $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_1,\ldots,e_n)$ تبدیل کرد و هم بتوان با فرد جابجایی این کار را انجام داد آنگاه هم داریم $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) = S(e_1,\ldots,e_n)$ و هم $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) = -S(e_1,\ldots,e_n)$. در نتیجه در صورتی

که مشخصه میدان ۲ نباشد باید داشته باشیم $S(e_1,...,e_n)=0$. این استدلال برای هر مجموعه n تایی از بردارها نیز برقرار است و نشان می‌دهد که هیچ تابع حجم ناصفری روی فضای V وجود ندارد. به عبارت دیگر مفهوم حجم روی یک فضای n بعدی با مشکل مواجه می‌شود. واقعیت این است که هیچ‌گاه چنین اتفاقی نمی‌افتد. یعنی برای هر جایگشت σ، زوجیت تعداد جابجایی‌هایی که $(e_{\sigma(1)},...,e_{\sigma(n)})$ را به $(e_1,...,e_n)$ تبدیل می‌کند در همه روش‌ها یکسان است. اثبات این موضوع را در بخش بعد ذکر می‌کنیم. با توجه به این واقعیت می‌توانیم *علامت جایگشت* σ را به صورت زیر تعریف کنیم. علامت جایگشت σ را برابر ۱ قرار می‌دهیم هرگاه بتوان با زوج جابجایی از $(\sigma(1),...,\sigma(n))$ به $(1,...,n)$ رسید. در غیر این صورت علامت σ را برابر ۱- قرار می‌دهیم. معمولاً علامت جایگشت σ را با ε_σ یا $\operatorname{sgn}\sigma$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$(e_{\sigma(1)},...,e_{\sigma(n)})=\varepsilon_\sigma S(e_1,...,e_n)$$

و در نتیجه

$$S(v_1,...,v_n)=\sum_{\sigma\in S^n}\varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)}...a_n^{\sigma(n)}\;\;S(e_1,...,e_n) \qquad (*)$$

سه گزاره زیر نتیجه مستقیم این رابطه اند.

قضیه. تابع حجم ناصفر روی یک فضای برداری n بعدی وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $\{e_1,...,e_n\}$ یک پایه برای V و $v_1,...,v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_1,...,e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j=a_j^1e_1+a_j^2e_2+\cdots+a_j^ne_n \qquad j=1,...,n$$

با توجه به رابطه (*) کافی است تابع $S:V^n\to F$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$S(v_1,...,v_n)=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...a_n^{\alpha(n)}$$

توجه کنید که $S(e_1,...,e_n)$ برابر یک است، زیرا برای این بردارها a_j^iها همه صفر اند جز برای $i=j$ که در این حالت داریم $a_i^i=1$. بنابراین همه جملات در تعریف S صفر است جز جمله‌ای که متناظر جایگشت همانی است. علامت این جایگشت نیز برابر ۱ است.

تابع S نسبت به هر مولفه خطی است، زیرا اگر $v'_j=b_j^1e_1+b_j^2e_2+\cdots+b_j^ne_n$ آنگاه

$$\begin{aligned}S(...,v_j+rv'_j,...)&=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...(a_j^{\alpha(j)}+rb_j^{\alpha(j)})...a_n^{\alpha(n)}\\&=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...a_j^{\alpha(j)}...a_n^{\alpha(n)}+r\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}...b_j^{\alpha(j)}...a_n^{\alpha(n)}\\&=S(...,v_j,...)+rS(...,v'_j,...)\end{aligned}$$

همچنین اگر دو بردار v_i و v_j با هم برابر باشند آنگاه $S(...,v_i,...,v_j,...)=0$، زیرا طبق تعریف S داریم

$$S(...,v_i,...,v_j,...)=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha...a_i^{\alpha(i)}...a_j^{\alpha(j)}...$$

در مجموع بالا هم حاصلضرب $...a_i^{\alpha(i)}...a_j^{\alpha(j)}...$ ظاهر می‌شود و هم حاصلضرب $...a_i^{\alpha(j)}...a_j^{\alpha(i)}....$ با توجه به اینکه برای هر k، $a_i^k=a_j^k$، این دو عبارت با هم مساویند ولی علامت‌های آنها در مجموع بالا متفاوت است. زیرا یک جابجایی لازم است که مجموعه مرتب $...,\alpha(i),...,\alpha(j),....$ را به مجموعه مرتب $...,\alpha(j),...,\alpha(i),....$ تبدیل کند. از آنجا که این موضوع برای همه عبارت‌های در مجموع بالا برقرار است مجموع بالا صفر است.

قضیه. هر دو حجم n بعدی ناصفر روی یک فضای برداری n بعدی مضربی از یکدیگر اند. یعنی اگر $S,S':V^n\to F$ دارای دو ویژگی (۱) و (۲) باشند آنگاه عدد ثابت C وجود دارد که برای هر n بردار $v_1,\dots,v_n$

$$S'(v_1,\dots,v_n)=C\,S(v_1,\dots,v_n)$$

اثبات. فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه برای V و $v_1,\dots,v_n$، n بردار دلخواه در V اند. هر یک از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از $\{e_1,\dots,e_n\}$ می‌نویسیم.

$$v_j=a_j^1e_1+a_j^2e_2+\cdots+a_j^ne_n \qquad j=1,\dots,n$$

در این صورت

$$\begin{aligned}S(v_1,\dots,v_n)&=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\ S(e_1,\dots,e_n)\\ S'(v_1,\dots,v_n)&=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\ S'(e_1,\dots,e_n)\end{aligned}$$

چون S و S' صفر نیستند و $\{e_1,\dots,e_n\}$ یک پایه است، $S(e_1,\dots e_n)$ و $S'(e_1,\dots e_n)$ اسکالرهایی ناصفر اند. بنابراین عدد C وجود دارد که $S'(e_1,\dots e_n)=CS(e_1,\dots e_n)$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}S'(v_1,\dots,v_n)&=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\ S'(e_1,\dots,e_n)\\ &=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_1^{\alpha(1)}\dots a_n^{\alpha(n)}\ CS(e_1,\dots,e_n)=CS(v_1,\dots,v_n)\end{aligned}$$

با توجه به مطالب بیان شده یک تابع حجم یکتایی روی F^n وجود دارد که مقدار آن روی پایه استاندارد F^n برابر یک است. به این تابع حجم روی F^n حجم استاندارد F^n می‌گوییم.
اگر V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد آنگاه حجم n بعدی ناصفر S روی یک پایه آن یک عدد حقیقی ناصفر است. اگر مقدار S روی آن پایه مثبت باشد آن را پایه مثبت و در غیر این صورت آن را پایه منفی می‌نامیم. به این ترتیب S روی V یک جهت معرفی می‌کند. این مفهوم در رابطه با نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر اهمیت پیدا می‌کند. تصویر هر پایه توسط چنین نگاشتی یک پایه دیگر است. اگر این دو پایه هم جهت باشند آنگاه به آن نگاشت نگاشت حافظ جهت می‌گوییم. در غیر این صورت آن را جهت برگردان می‌نامیم.

قضیه. همه روش‌هایی که با جابجایی اعضای مجموعه مرتب $(\alpha(1),\dots,\alpha(n))$ آن را به مجموعه مرتب $(1,\dots,n)$ تبدیل می‌کند یا همگی زوج جابجایی دارند و یا همگی فرد جابجایی دارند.

اثبات. فرض کنید α نگاشتی یک به یک و پوشا از $\{1,\dots,n\}$ به خودش و $(e_1,\dots,e_n)$ مجموعه‌ای مرتب از n عضو باشد. α تغییر آرایشی به صورت $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ برای این مجموعه معرفی می‌کند که عضو iام در آرایش جدید همان عضو $\alpha(\iota)$ام در آرایش اولی است. حال فرض کنید β نیز یک جایگشت باشد. در این صورت β نیز می‌تواند روی مجموعه مرتب جدید $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ اثر کند و آرایش جدیدتری ارائه دهد که در آن عضو iام همان عضو $\beta(i)$ام آرایش میانی است و میدانیم که عضو $\beta(i)$ام آرایش میانی همان عضو $\alpha(\beta(i))$ام آرایش اولی است. پس آرایش بدست آمده بعد از اعمال جایگشت β روی $(e_{\alpha(1)},\dots,e_{\alpha(n)})$ برابر است با $(e_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,e_{\alpha\circ\beta(n)})$.
حال چند جمله‌ای $p(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ را در نظر بگیرید. برای هر جایشگت α داریم

$$p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)})=\pm p(x_1,..,x_n)$$

زیرا هر جمله (x_i-x_j) خودش یا قرینه‌اش دقیقاً یک بار در $p(x_{\alpha1},\dots,x_{\alpha(n)})$ ظاهر می‌شود. این ضریب را با $\operatorname{sgn}\alpha$ نمایش می‌دهیم.
بنابراین

$$p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)})=\operatorname{sgn}\alpha\ p(x_1,\dots,x_n)$$

با توجه به مطالب بالا داریم

$$p(x_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,x_{\alpha\circ\beta(n)}) = \operatorname{sgn}\alpha\circ\beta\ p(x_1,\dots,x_n)$$
$$p(x_{\alpha\circ\beta(1)},\dots,x_{\alpha\circ\beta(n)}) = \operatorname{sgn}\beta\ p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = \operatorname{sgn}\beta\operatorname{sgn}\alpha\ p(x_1,\dots,x_n)$$

بنابراین

$$\operatorname{sgn}\alpha\circ\beta = \operatorname{sgn}\alpha.\operatorname{sgn}\beta$$

بنابراین تنها کافی است نشان دهیم اگر α جایگشت جابجا کردن دو عضو $i_0 < j_0$ با هم باشد آنگاه $\operatorname{sgn}\alpha = -1$.

$$p(x_{\alpha(1)},\dots x_{\alpha(n)}) = p(x_1,\dots,x_{j_0},\dots,x_{i_0},\dots,x_n)$$

تنها تفاوت چند جمله‌ای بالا با چند جمله‌ای $p(x_1,\dots,x_{i_0},\dots,x_{j_0},\dots,x_n) =$ در جملات زیر است.

اگر $i_0 < k < j_0$، قرینه جمله $x_{i_0} - x_k$ در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

اگر $i_0 < k < j_0$، قرینه جمله $x_k - x_{j_0}$ در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

قرینه جمله $(x_{i_0} - x_{j_0})$ نیز در چند جمله‌ای بالا ظاهر می‌شود.

بنابراین

$$p(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = (-1)^{2(j_0-i_0-1)+1}p(x_1,\dots,x_n)$$
$$= -p(x_1,\dots,x_n)$$

تغییر حجم توسط عملگرهای خطی و دترمینان

حجم اشکال در یک فضای برداری حقیقی

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{R}$ و $A\subset V$ زیر مجموعه‌ای از آن باشد. متوازی السطوح تولید شده توسط پایه $\{v_1,\dots,v_n\}$ را با $K_{\{v_1,\dots,v_n\}}$ و یا به اختصار با K نمایش می‌دهیم.

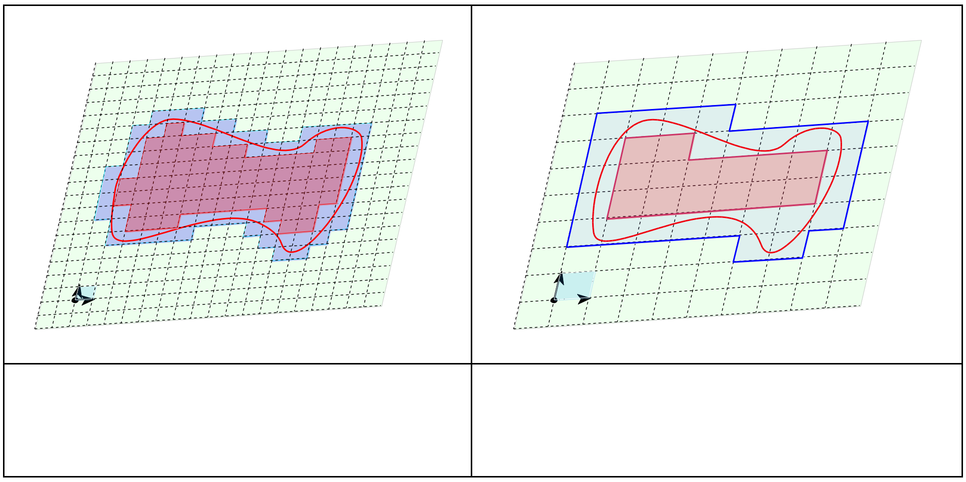
$$K = K_{\{v_1,\dots,v_n\}} = \{t_1v_1 + \dots + t_nv_n\ :\ 0 \le t_i < 1\}$$

فضای V توسط انتقال‌های K فرش می‌شود. یعنی مجموعه‌های

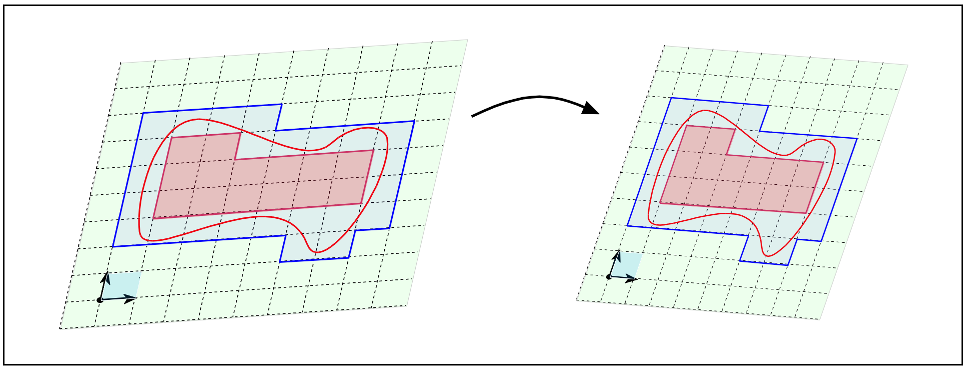
$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n + K \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

V را افراز می‌کنند و یک شبکه‌بندی برای V تشکیل می‌دهند. حجم هر یک از این خانه‌ها برابر حجم K است. اجتماع خانه‌هایی از این شبکه‌بندی که شکل A را می‌پوشانند، تقریب بیرونی و اجتماع خانه‌هایی که کاملاً داخل A قرار دارند تقریب درونی A نامیده می‌شوند و آنها را به ترتیب با $\bar{A}$ و $\underline{A}$ نمایش می‌دهیم.

با نصف کردن ابعاد شبکه بندی (یعنی در نظر گرفتن شبکه بندی‌ای که با $\frac{1}{2}K$ تولید می‌شود) تقریب‌های درونی و بیرونی به شکل A نزدیک‌تر می‌شوند. اگر در این فرایند کوچک کردن خانه‌های شبکه بندی حجم تقریب‌های بیرونی و حجم تقریب‌های درونی به یک عدد نزدیک شود می‌گویم A دارای حجم است و آن عدد را برابر حجم A تعریف می‌کنیم. ممکن است بعضی از اشکال دارای حجم نباشند.



حال فرض کنید $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد. T شکل A را به شکل $\tilde{A}=T(A)$ تبدیل می‌کند. T متوازی السطوح $K_{\{v_1,\dots,v_n\}}$ را به متوازی السطوح $\tilde{K}=T(K)=K_{\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}}$ و تقریب درونی و بیرونی A را به تقریب درونی و بیرونی $\tilde{A}$ تبدیل می‌کند. اگر S یک حجم n بعدی روی V باشد آنگاه برای تقریب‌های درونی و بیرونی داریم



$$\frac{vol(\bar{\tilde{A}})}{vol(\bar{A})}=\frac{vol(\underline{\tilde{A}})}{vol(\underline{A})}=\frac{vol(\tilde{K})}{vol(K)}=\frac{S(T(v_1),\dots,T(v_n))}{S(v_1,\dots,v_n)}$$

بنابراین با کوچک کردن ابعاد شبکه خواهیم داشت

$$\frac{vol(\tilde{A})}{vol(A)}=\frac{S(T(v_1),\dots,T(v_n))}{S(v_1,\dots,v_n)}$$

به عبارت دیگر T حجم همه شکل‌ها را با ضریبی ثابت تغییر می‌دهد که به آن دترمینان T می‌گوییم. همچنین اگر این ضریب مثبت باشد نگاشت T را حافظ جهت و در غیر این صورت جهت برگردان می‌گوییم.

دترمینان یک عملگر خطی

در قسمت قبل دیدیم که یک عملگر خطی روی یک فضای برداری حقیقی حجم اشکال را با ضریب ثابتی تغییر می‌دهد. با توجه به اینکه مفهوم حجم را برای فضاهای برداری دلخواه تعمیم دادیم می‌توان انتظار داشت که ویژگی بالا برای عملگرهای روی فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار باشد. اما حجم یک شکل دلخواه که در قسمت قبل معرفی شد تنها برای فضاهای برداری روی $\mathbb{R}$ قابل تعریف است. برای یک فضای برداری دلخواه تنها می‌توان حجم یک پایه را معرفی کرد که در قسمت قبل این کار انجام شد. در نتیجه حدس می‌زنیم که یک عملگر دلخواه حجم همه پایه‌ها را با نسبتی ثابت تغییر دهد.

قضیه. فرض کنید α و β دو پایه مرتب برای V و S حجمی ناصفر روی آن باشد. برای هر عملگر $T:V\to V$ داریم

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(T(\beta))}{S(\beta)}$$

اثبات: اگر T یک به یک و پوشا نباشد، آنگاه صورت هر دو کسر بالا صفر است و در نتیجه رابطه بالا در این حالت درست است.
بنابراین فرض می‌کنیم T یک به یک و پوشا است. در این حالت $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ نیز پایه‌هایی مرتب برای V هستند و در نتیجه هیچ یک از حجم‌های بالا صفر نخواهد بود. فرض کنید $\alpha = \{v_1,...,v_n\}$ و $\beta = \{w_1,\dots w_n\}$ و $w_i = a_i^1 v_1 + \cdots + a_i^n v_n$. از خطی بودن T رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$T(w_i) = a_i^1 T(v_1) + \cdots + a_i^n T(v_n)$$

به این ترتیب با توجه به بسط تابع حجم داریم

$$S(w_1,...,w_n) = \sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)}...a_n^{\sigma(n)} \quad S(v_1,...,v_n)$$

و به همین صورت

$$S(T(w_1),...,T(w_n)) = \sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)}...a_n^{\sigma(n)} \quad S(T(v_1),...,T(v_n))$$

از این دو رابطه حکم قضیه ثابت می‌شود.

قضیه. فرض کنید S و S' دو حجم ناصفر روی فضای برداری دلخواه V و α یک پایه مرتب برای آن باشد. برای هر عملگر $T : V \to V$ داریم

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S'(T(\alpha))}{S'(\alpha)}$$

اثبات. چون هر دو حجم ناصفر مضربی از یکدیگر اند.
طبق این دو قضیه هر عملگری حجم همه پایه‌ها را با نسبت یکسانی تغییر می‌دهد که مستقل از پایه و تابع حجم است. مانند حالت حقیقی به این نسبت *دترمینان عملگر خطی* T می‌گوییم و آن را با $\det T$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\det T = \frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)}$$

که در آن α یک پایه مرتب برای V و S یک حجم ناصفر روی آن است. توجه کنید که طبق مطالب بالا این مقدار مستقل از پایه مرتب α و حجم ناصفر S است.
اگر $\alpha = \{v_1,...,v_n\}$ یک پایه برای V باشد و $T(v_i) = a_i^1 v_1 + \cdots + a_i^n v_n$ آنگاه با توجه به بسط تابع حجم

$$S(T(v_1),...,T(v_n)) = \sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)}...a_n^{\sigma(n)} \quad S(v_1,...,v_n)$$

به عبارت دیگر

$$\det T = \frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \sum\nolimits_\sigma \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)}...a_n^{\sigma(n)}$$

اما a_j^i درایه ijام ماتریس نمایش نگاشت خطی T در پایه α است. بنابراین به کمک رابطه بالا می‌توانیم دترمینان T را از روی $[T]_\alpha^\alpha$ بدست آوریم. به این ترتیب می‌توانیم دترمینان یک ماتریس مربعی را نیز تعریف کنیم. *دترمینان ماتریس مربعی* A برابر دترمینان عملگر خطی T است که نمایش آن عملگر در یک پایه ماتریس A شود. به عبارت دیگر اگر $A = [a_{ij}]$ آنگاه

$$\det A = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

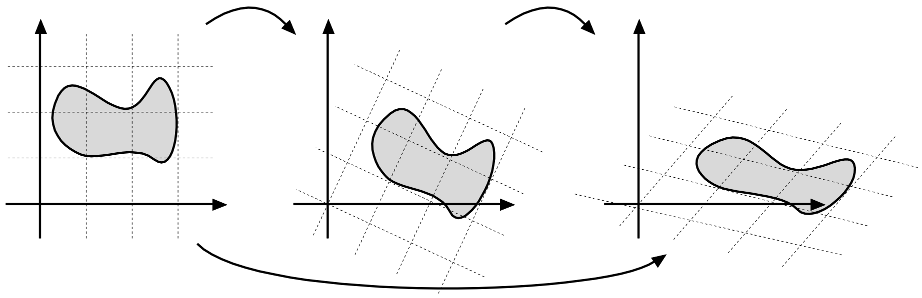
با این تعریف خواهیم داشت $\det T = \det[T]_\alpha^\alpha$ که در آن α یک پایه دلخوه فضا است. توجه کنید که دترمینان T با دترمنیان ماتریس نمایش آن در یک پایه این ارتباط ساده را دارد. مثلاً اگر α و β دو پایه برای V باشند و $A = [T]_\beta^\alpha$، آنگاه

$$S(T(\alpha)) = \det A . S(\beta)$$

بنابراین دترمینان ماتریس نمایش T در پایه‌های α و β برابر نسبت حجم تصویر پایه α به حجم پایه β است. اما این مقدار ارتباط ساده‌ای با دترمینان نگاشت T ندارد.

تا کنون دیدیم یک عملگر خطی حجم همه پایه‌ها را با نسبت ثابتی تغییر می‌دهد که همان دترمینان آن نگاشت خطی است. اگر فضای برداری حقیقی باشد آنگاه حجم پایه‌ها مفهومی شهودی دارد که قابل گسترش به شکل‌های دیگر نیز است و یک عملگر خطی حجم همه اشکال را با همان ضریب دترمینان تغییر می‌دهد.

حال اگر T و U دو عملگر روی فضای برداری حقیقی باشند آنگاه UT نیز عملگری روی آن فضا است و با توجه به شکل زیر داریم $\det UT = \det T . \det U$.



این گزاره برای عملگرهای خطی روی هر فضای برداری دیگر نیز درست است.

قضیه. برای هر دو عملگر خطی $T,U : V \to V$ روی یک فضای برداری داریم

$$\det UT = \det T . \det U$$

اثبات. اگر یکی از دو عملگر T یا U یک به یک و پوشا نباشد آنگاه UT نیز یک به یک و پوشا نخواهد بود و در نتیجه دو طرف رابطه بالا صفر است و تساوی برقرار است. فرض کنید S یک حجم ناصفر روی V، α یک پایه مرتب برای آن و T و U دو عملگر یک به یک و پوشا روی V باشند. در این صورت $\beta = T(\alpha)$ نیز یک پایه مرتب برای V است. در نتیجه طبق تعریف دترمینان

$$\begin{aligned}\det UT &= \frac{S(UT(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(U(\beta))}{S(\alpha)} \\ &= \frac{S(U(\beta))}{S(\beta)} . \frac{S(\beta)}{S(\alpha)} = \frac{S(U(\beta))}{S(\beta)} . \frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \det U . \det T\end{aligned}$$

بنابراین $\det UT = \det T . \det U$.

قضیه. فرض کنید S و S' به ترتیب دو حجم روی V و V^* باشند. حاصل‌ضرب حجم یک پایه مرتب V در حجم دوگان آن مقداری ثابت مستقل از آن پایه است. یعنی مقدار $S(\alpha)S'(\alpha^*)$ ثابت و مستقل از پایه مرتب α است.

اثبات. نشان می‌دهیم که اگر یکی از اعمال پایه‌ای مقدماتی را روی پایه مرتب α انجام دهیم مقدار $S(\alpha)S'(\alpha^*)$ تغییر نمی‌کند. از آنجا که با اعمال پایه‌ای مقدماتی می‌توانیم از یک پایه مرتب به هر پایه دیگر برسیم حاصل عبارت بالا برای همه پایه‌های مرتب مقداری ثابت خواهد بود.

---

۱. جابجا کردن دو عضو پایه. با جابجا کردن دو عضو iام و jام یک پایه مرتب، دو عضو iام و jام دوگان آن نیز جابجا می‌شوند. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار هم حجم آن پایه منفی می‌شود و هم حجم دوگان آن. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.
۲. ضرب کردن یک عضو پایه در اسکالری ناصفر. با ضرب کردن عضو iام یک پایه در اسکالر ناصفر r، عضو iام پایه دوگان آن در r^{-1} ضرب می‌شود. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار حجم آن پایه در r ضرب می‌شود و حجم دوگان آن در r^{-1}. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.
۳. جمع کردن مضربی از یک عضو با عضو دیگر. با جمع کردن r برابر عضو iام با عضو jام، در پایه دوگان، $-r$ برابر عضو jام با عضو iام جمع می‌شود. طبق ویژگی‌های تابع حجم با این کار نه حجم آن پایه و نه حجم دوگان آن تغییری نمی‌کنند. بنابراین مقدار حاصل‌ضرب بالا تغییر نمی‌کند.

قضیه: فرض کنید $T:V\to V$ یک عملگر خطی و $T^t:V^*\to V^*$ ترانهاده آن است. در این صورت $\det T=\det T^t$.

اثبات: اگر T یک به یک و پوشا نباشد T^t نیز چنین خواهد بود و در نتیجه دو طرف رابطه بالا صفر است. بنابراین فرض می‌کنیم T و در نتیجه T^t یک به یک و پوشا باشد. بنابراین تصویر پایه مرتب α توسط T یک پایه مرتب برای V است که آن را با β نمایش می‌دهیم. فرض کنید دوگان این پایه‌ها به ترتیب α^* و β^* باشند. می‌دانیم $T^t(\beta^*)=\alpha^*$. اگر S و S' به ترتیب دو حجم روی V و V^* باشند طبق قضیه قبل داریم

$$S(\alpha)S'(\alpha^*)=S(\beta)S'(\beta^*)$$

بنابراین

$$\det T=\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)}=\frac{S(\beta)}{S(\alpha)}=\frac{S(\alpha^*)}{S(\beta^*)}=\frac{S(T^t(\beta^*))}{S(\beta^*)}=\det T^t$$

دترمینان یک ماتریس

فرض کنید $A=[A_1\mid\cdots\mid A_n]$ یک ماتریس $n\times n$ با ستون‌های $A_1,\dots,A_n$ باشد. از آنجا که نمایش عملگر $L_A:F^n\to F^n; X\mapsto AX$ در پایه استاندارد F^n برابر ماتریس A است داریم $\det A=\det L_A$. بنابراین. اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه استاندارد و S حجم استاندارد F^n باشند آنگاه

$$\det A=\det L_A=\frac{S(L_A(e_1),\dots,L_A(e_n))}{S(e_1,\dots,e_n)}=S(L_A(e_1),\dots,L_A(e_n))=S(A_1,\dots,A_n)$$

بنابراین دترمینان یک ماتریس $n\times n$ برابر حجم استاندارد ستون‌هایش به عنوان بردارهایی در F^n است. در نتیجه ویژگی‌های تابع حجم برای دترمینان یک ماتریس نیز برقرار است.

۱. دترمینان نسبت به هر ستون ماتریس خطی است.

$$\det[\cdots\mid A_i+rA_i'\mid\cdots]=\det[\cdots|A_i|\cdots]+r\det[\cdots\mid A_i'\mid\cdots]$$

۲. اگر دو ستون یک ماتریس با هم برابر باشند آنگاه دترمینان آن صفر است.

$$\det[\cdots\mid A_i\mid\cdots\mid A_i\mid\cdots]=0$$

۳. با جابجایی دو ستون یک ماتریس دترمینان آن منفی می‌شود.

$$\det[\cdots\mid A_j\mid\cdots\mid A_i\mid\cdots]=-\det[\cdots\mid A_i\mid\cdots\mid A_j\mid\cdots]$$

۴. با جمع کردن مضربی از یک ستون با ستون دیگر دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j + rA_i \mid \cdots] = \det[\cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots]$$

۵. یک ماتریس وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن ناصفر باشد.

به علاوه دترمینان ماتریس‌ها ویژگی‌های دترمینان عملگرهای خطی را نیز دارند.

۶. اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند آنگاه $\det(A.B) = \det A . \det B$.

اثبات. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی F و α یک پایه برای آن باشد. عملگرهای T و U روی V را به گونه‌ای درنظر بگیرید که $[T]_\alpha^\alpha = A$ و $[U]_\alpha^\alpha = B$. در این صورت $[TU]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha [U]_\alpha^\alpha = AB$. بنابراین

$$\det A . \det B = \det T . \det U = \det(TU) = \det(A.B)$$

۷. برای هر ماتریس مربعی $\det A = \det A^t$.

اثبات. اگر A ماتریس نمایش عملگر $T : V \to V$ در پایه α باشد آنگاه A^t ماتریس نمایش عملگر $T^t : V^* \to V^*$ در پایه α^* است و از آنجا که دترمینان T و T^t برابرند دترمینان A و A^t نیز با هم برابر خواهند بود.

با توجه به اینکه سطرهای ماتریس A همان ستون‌های ماتریس A^t هستند همه ویژگی‌های (۱) تا (۴) که برای ستون‌های ماتریس بیان شد در مورد سطرهای ماتریس نیز برقرار است.

۷. دترمینان نسبت به هر سطر خطی است.

$$\det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i + r\nu_i' \\ \vdots \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

۸. اگر دو سطر یک ماتریس با هم برابر باشند آنگاه دترمینان آن صفر است.

۹. با جابجایی دو سطر یک ماتریس دترمینان آن منفی می‌شود.

۱۰. با جمع کردن مضربی از یک سطر با سطر دیگر دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \end{bmatrix} = ۰, \qquad \det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_j \\ \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \\ \nu_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad \det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \\ \nu_j + r\nu_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vdots \\ \nu_i \\ \vdots \\ \nu_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

۱۱. دترمینان ماتریس همانی برابر یک است. زیرا ماتریس همانی نمایش ماتریسی نگاشت همانی است که به وضوح حجم را تغییر نمی‌دهد. این موضوع از رابطه‌ای که دترمینان یک ماتریس را بوسیله درایه هایش ارائه می‌کند نیز به سادگی بدست می‌آید. همچنین با توجه به اینکه دترمینان یک ماتریس برابر حجم استاندارد ستون‌هایش به عنوان بردارهایی در F^n است و ستون‌های ماتریس همانی پایه استاندارد F^n را تشکیل می‌دهد روشن است که دترمینان ماتریس همانی برابر یک است.

۱۲. دترمینان تنها تابعی به شکل $D : M_{n\times n}(F) \to F$ است که دارای سه ویژگی زیر است.

الف) D نسبت به هر ستون خطی است. یعنی برای هر i داریم

$$D([\cdots \mid \alpha_i + r\alpha_i' \mid \cdots]) = D([\cdots \mid \alpha_i \mid \cdots]) + rD([\cdots \mid \alpha_i' \mid \cdots])$$

ب) اگر دو ستون ماتریس A برابر باشند آنگاه $D(A)=0$.

ج) مقدار این تابع روی ماتریس همانی برابر یک است. یعنی $D(I)=1$.

اثبات. هر مجموعه مرتب n تایی از بردارهای در F^n یک ماتریس $n\times n$ را تشکیل می‌دهند که آن بردارها به ترتیب در ستون‌های آن ماتریس قرار می‌گیرند. بنابراین تابع D با ویژگی‌های بالا یک تابع حجم روی F^n است که مقدار آن روی پایه استاندارد برابر یک شده است. یعنی این تابع همان حجم استاندارد روی F^n است و به عبارت دیگر همان تابع دترمینان روی ماتریس‌ها است.

۱۳. دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن.

اثبات. با توجه به اینکه ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی ماتریسی بالا مثلثی است و دترمینان یک ماتریس برابر دترمینان ترانهاده آن است کافی است این موضوع را برای ماتریس‌های بالا مثلثی نشان دهیم. توجه کنید که در ماتریس بالا مثلثی A، درایه ijام زمانی می‌تواند ناصفر باشد که $i\leq j$. حال فرض کنید $\sigma\in S^n$ یک جایگشت دلخواه باشد. حاصل‌ضرب $a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$ تنها زمانی می‌تواند ناصفر باشد که همه این درایه‌ها ناصفر باشند، یا به عبارت دیگر

$$1\geq\sigma(1),....,n\geq\sigma(n)$$

با توجه به اینکه $(\sigma(1),...,\sigma(n))$ همان $(1,...,n)$ است اما باترتیبی متفاوت، تنها جایگشتی که در رابطه بالا صدق می‌کند جایگشت همانی است؛ زیرا $\sigma(1)$ یکی از اعداد $\{1,...,n\}$ است و با توجه به شرط بالا باید داشته باشیم $\sigma(1)=1$. بنابراین $\sigma(2)$ یکی از اعداد $\{2.3,...,n\}$ است که با توجه به شرط بالا و $\sigma(2)\neq 1$ باید داشته باشیم $\sigma(2)=2$. به صورت مشابه باید داشته باشیم $\sigma(3)=3$ و ... و $\sigma(n)=n$. از آنجا که علامت این جایگشت نیز یک است داریم

$$\det A=\sum_{\sigma\in S^n}\varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}=a_{11}a_{22}...,a_{nn}$$

روش عملی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس

اگرچه ویژگی‌های بسیاری از دترمینان را به کمک رابطه

$$\det A=\sum_{\sigma\in S^n}\varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$$

بدست آوردیم اما محاسبه کردن دترمینان یک ماتریس به کمک این رابطه زمانی که ابعاد ماتریس کمی بزرگ باشد کار دشواری است؛ زیرا تعداد جملات مجموع بالا برابر $n!$ است و این مقدار با بزرگ شدن n به سرعت بزرگ می‌شود. اما به کمک ویژگی‌های بدست آمده برای دترمینان می‌توان روشی عملی برای محاسبه آن ارائه کرد. با توجه به مطالب بیان شده تغییرات دترمینان یک ماتریس در طی هر یک از اعمال سطری مقدماتی روشن است.

۱. جابجا کردن دو سطر. با جابجا کردن دو سطر iام و jام ($i\neq j$) ماتریس A، ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید که برای آن داریم

$$\det\tilde{A}=-\det A$$

اگر E ماتریس مقدماتی متناظر این عمل سطری مقدماتی باشد آنگاه $\tilde{A}=EA$ و $\det E=-1$. زیرا E ماتریس حاصل از جابجا کردن سطرهای iام و jام ماتریس همانی است.

۲. ضرب کردن یک سطر در اسکالری ناصفر. با ضرب کردن سطر iام ماتریس A در اسکالر ناصفر r، ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید که برای آن داریم

$$\det\tilde{A}=r\det A$$

مانند بالا اگر E ماتریس مقدماتی متناظر این عمل سطری مقدماتی باشد آنگاه $\tilde{A} = EA$ و $\det E = r$. زیرا E ماتریس حاصل از ضرب کردن سطر iام ماتریس همانی در عدد ناصفر r است.
۳. جمع کردن ضریبی از یک سطر با سطر دیگر. با جمع کردن r برابر سطر iام ماتریس A با سطر jام آن ماتریس $\tilde{A}$ بدست می‌آید. که برای آن داریم

$$\det \tilde{A} = \det A$$

در این حالت نیز مانند بالا $\tilde{A} = EA$ و $\det E = ۱$. زیرا E ماتریس حاصل از جمع کردن r برابر سطر iام ماتریس همانی با سطر jام آن است.
می‌دانیم که هر ماتریسی را می‌توان با این اعمال به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل کرد. اگر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی بدست آمده دارای سطر صفر باشد واضح است که دترمینان آن صفر است. در نتیجه دترمینان ماتریس اولی نیز باید صفر باشد. اگر ماتریس حاصل هیچ سطر صفری نداشته باشد از آنجا که ماتریس مربعی است و درایه‌های پیشروی سطرها به صورت پلکانی قرار گرفته اند، ماتریس حاصل باید ماتریس همانی باشد. به عبارت دیگر تنها ماتریس تحویل شده سطری پلکانی مربعی که دارای سطر صفر نیست ماتریس همانی است که دترمینان آن برابر یک است. بنابراین یک راه عملی و مناسب برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی بدست می‌آید.
به عبارت دیگر فرض کنید $\tilde{A}$ از انجام k عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A بدست آمده باشد و $E_۱,\ldots,E_k$ ماتریس‌های مقدماتی متناظر با آن اعمال باشند. در این صورت داریم

$$\tilde{A} = E_k \ldots E_۱ A \qquad \Rightarrow \qquad \det \tilde{A} = \det E_k \ldots \det E_۱ . \det A$$

دترمینان هریک از E_i ها معلوم است. بنابراین اگر $\tilde{A}$ ماتریسی باشد که دترمینان آن به سادگی قابل محاسبه باشد آنگاه دترمینان ماتریس A نیز به سادگی محاسبه می‌شود. می‌توان با انجام اعمال سطری مقدماتی فرض کرد $\tilde{A}$ یک ماتریس ساده سطری است. در این صورت اگر $\tilde{A}$ دارای سطر صفر باشد آنگاه $\det \tilde{A} = ۰$ و این نتیجه می‌دهد $\det A = ۰$. اگر $\tilde{A}$ دارای سطر صفر نباشد آنگاه باید ماتریس همانی باشد. در این حالت داریم

$$\begin{aligned} I = E_k \ldots E_۱ A \qquad &\Rightarrow \qquad ۱ = \det E_k \ldots \det E_۱ \det A \\ &\Rightarrow \qquad \det A = (\det E_k \ldots \det E_۱)^{-۱} \end{aligned}$$

قاعده کرامر

در مبحث حل دستگاه‌های خطی دیدیم برای حل دستگاه

$$AX = b$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده $[A \mid b]$ آن را به ماتریس $[\tilde{A} \mid \tilde{b}]$ تبدیل می‌کنیم که $\tilde{A}$ تحویل شده سطری پلکانی است. زمانی که ماتریس $A = [A_۱ \mid \cdots \mid A_n]$ مربعی باشد و ماتریس تحویل شده سطری پلکانی آن همانی باشد داریم

$$\begin{aligned} [I \mid \tilde{b}] &= E_k \ldots E_۱ [A \mid b] = E_k \ldots E_۱ [A_۱ \mid \cdots \mid A_n \mid b] \\ &= [E_k \ldots E_۱ A_۱ \mid \cdots \mid E_k \ldots E_۱ A_n \mid E_k \ldots E_۱ b] \end{aligned}$$

که در بالا A_i ستون iام ماتریس A است. بنابراین $E_k \ldots E_۱ A_i = e_i$ که ستون e_i بردار iام پایه استاندارد F^n است. اگر $x_۱,\ldots,x_k$ درایه‌های ستون X و $\tilde{b}_۱,\ldots,\tilde{b}_n$ درایه‌های ستون $\tilde{b}$ باشند آنگاه

$$\begin{aligned} x_i = \tilde{b}_i &= \det[e_1 \mid \cdots \mid \tilde{b} \mid \cdots \mid e_n] \\ &= \det[E_k \ldots E_1 A_1 \mid \cdots \mid \ \ \big|\ldots\big| E_k \ldots E_1 b \mid \cdots \mid E_k \ldots E_1 A_n] \\ &= \det E_k \ldots E_1 [A_1 \mid \cdots \mid b \mid \cdots \mid A_n] \\ &= \det E_k \ldots E_1 . \det A^{(i)} = \frac{\det A^{(i)}}{\det A} \end{aligned}$$

که در بالا $A^{(i)}$ ماتریس حاصل از قرار دادن ستون b بجای ستون iام ماتریس A است. به این رابطه قاعده کرامر برای بدست آوردن جواب دستگاه خطی می‌گویند. توجه کنید که این رابطه زمانی می‌تواند استفاده شود که ماتریس A مربعی و وارون پذیر باشد. در زیر اثبات ساده دیگری را برای این قاعده بیان می‌کنیم.

با توجه به خطی بودن دترمینان نسبت به ستون iام داریم

$$\det(A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j A_j, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$$

همه جمله‌های بالا جز جمله iام صفر اند زیرا دو ستون برابر در آنها ظاهر شده است. از طرفی $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = AX$. بنابراین اگر $AX = b$ و $A^{(i)}$ ماتریس حاصل از قرار دادن ستون b بجای ستون iام ماتریس A باشد آنگاه داریم

$$\det A^{(i)} = x_j \det A$$

بسط دترمینان نسبت به یک سطر یا یک ستون

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ تایی، A^{ij} ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ تایی حاصل از حذف کردن سطر و ستون درایه ijام ماتریس A و a_{ij} درایه ijام ماتریس A باشد (یعنی $(A)_{ij} = a_{ij}$). در این صورت

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} \qquad j = 1, \ldots, n \\ \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

اثبات. **راه حل اول.**

نشان می‌دهیم تابع

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}$$

ویژگی‌های دترمینان را دارا است و از یکتایی دترمینان نتیجه می‌گیریم که $D(A) = \det A$.

خطی بودن نسبت به هر ستون. می‌خواهیم نشان دهیم تابع بالا نسبت به ستون jام خطی است. فرض کنید همه ستون‌های ماتریس‌های A، B و C بجز ستون jام با هم برابرند و ستون jام ماتریس C برابر است با حاصل جمع r برابر ستون jام ماتریس A با ستون jام ماتریس B. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} A &= \left[\alpha_{۱}\middle|\cdots\middle|\alpha_{j_{۰}}\middle|\cdots\middle|\alpha_{n}\right] \\ B &= \left[\alpha_{۱}\middle|\cdots\middle|\alpha'_{j_{۰}}\middle|\cdots\middle|\alpha_{n}\right] \\ C &= \left[\alpha_{۱}\middle|\cdots\middle|r\alpha_{j_{۰}} + \alpha'_{j_{۰}}\middle|\cdots\cdots\middle|\alpha_{n}\right] \end{aligned}$$

اگر $j \neq j_{۰}$ آنگاه با توجه به خطی بودن دترمینان نسبت به ستون‌ها داریم

$$\det C^{ij} = r\det A^{ij} + \det B^{ij}$$

همچنین با توجه به فرض اولیه در مورد ماتریس‌های A, B, C ، $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$.
اگر $j = j_{۰}$ ، آنگاه $A^{ij_{۰}} = B^{ij_{۰}} = C^{ij_{۰}}$ و در نتیجه

$$\det A^{ij_{۰}} = \det B^{ij_{۰}} = \det C^{ij_{۰}}$$

همچنین $c_{ij_{۰}} = ra_{ij_{۰}} + b_{ij_{۰}}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned} D(C) &= \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} c_{ij} \det C^{ij} \\ &= (-۱)^{i+j_{۰}} (ra_{ij_{۰}} + b_{ij_{۰}}) \det C^{ij_{۰}} + \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq j_{۰}}}^{n} (-۱)^{i+j} c_{ij} (r\det A^{ij} + \det B^{ij}) \\ &= r\sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij} + \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} b_{ij} \det B^{ij} = rD(A) + D(B) \end{aligned}$$

مقدار این تابع روی ماتریس‌هایی که دو ستون یکسان دارند صفر است. اگر دو ستون $j_{۱} < j_{۲}$ در ماتریس A با هم برابر باشند. در این حالت اگر $j \neq j_{۱}, j_{۲}$ آنگاه A^{ij} نیز دارای دو ستون برابر است و در نتیجه $\det A^{ij} = ۰$. بنابراین با توجه به‌این که $a_{ij_{۱}} = a_{ij_{۲}}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D(A) &= (-۱)^{i+j_{۱}} a_{ij_{۱}} \det A^{ij_{۱}} + (-۱)^{i+j_{۲}} a_{ij_{۲}} \det A^{ij_{۲}} \\ &= (-۱)^{i+j_{۱}} a_{ij_{۱}} \left[\det A^{ij_{۱}} + (-۱)^{j_{۲}-j_{۱}} \det A^{ij_{۲}}\right] \end{aligned}$$

اما همه ستون‌های دو ماتریس $A^{ij_{۱}}$ و $A^{ij_{۲}}$ با هم برابرند ولی با ترتیبی کمی متفاوت ظاهر شده اند. ستون $j_{۲} - ۱$ام ماتریس $A^{ij_{۱}}$ برابر ستون $j_{۱}$ام $A^{ij_{۲}}$ است و بقیه ستون‌ها با ترتیبی یکسانی قرار گرفته‌اند، به این معنی که با حذف ستون $j_{۲} - ۱$ام از ماتریس $A^{ij_{۱}}$ و حذف ستون $j_{۱}$ام از ماتریس $A^{ij_{۲}}$ دو ماتریس برابر می‌شوند (هر دو برابر ماتریس حاصل از حذف ستون‌های $j_{۱}$ام و $j_{۲}$ام و سطر iام ماتریس A اند). بنابراین اگر ستون $j_{۲} - ۱$ام از ماتریس $A^{ij_{۱}}$ را به صورت متوالی با ستون‌های قبلی آن جابجا کنیم تا این ستون به ستون $j_{۱}$ام تبدیل شود آنگاه ماتریس حاصل همان $A^{ij_{۲}}$ خواهد بود.
با جابجایی ستون‌های ماتریس $A_{ij_{۱}}$ ماتریس $A_{ij_{۲}}$ بدست می‌آید. بنابراین $\det A^{ij_{۱}} = (-۱)^{j_{۲}-j_{۱}-۱} \det A^{ij_{۲}}$. بنابراین

$$D(A) = (-۱)^{i+j_{۱}} a_{ij_{۱}} . \det A^{ij_{۱}} \left[۱ + (-۱)^{j_{۲}-j_{۱}} (-۱)^{j_{۲}-j_{۱}-۱}\right] = ۰$$

مقدار این تابع روی ماتریس همانی برابر یک است. طبق تعریف تابع D داریم

$$D(I_{n}) = \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} (I_{n})_{ij} \det(I_{n})^{ij} = (-۱)^{۲i} . ۱ . \det(I_{n})^{ii} = \det I_{n-۱} = ۱$$

راه حل دوم.
منظور از یک قطر پراکنده در یک ماتریس $n\times n$ تایی، n درایه آن است به گونه‌ای که در هر سطر و در هر ستون دقیقاً یک درایه ظاهر شده باشد.
برای یک قطر پراکنده فرض کنید از سطر iام درایه $\alpha(i)$ام آن و از ستون jام درایه $\beta(j)$ام آن در قطر پراکنده ظاهر شده باشند. α و β دو جایگشت $\{۱,...,n\}$ هستند. درایه‌های این قطر پراکنده به کمک α و β به صورت زیر مشخص می‌شوند.

$$\{a_{۱\alpha(۱)},...,a_{n\alpha(n)}\}=\{a_{\beta(۱)۱},...,a_{\beta(n)n}\}$$

بنابراین α و β وارون یکدیگر هستند و علامت آنها به عنوان جایگشت با یکدیگر برابر است. علامت این قطر پراکنده را برابر علامت α (یا β!) تعریف می‌کنیم. دقت کنید که با جابجا کردن دو سطر iام و jام ماتریس، این قطر پراکنده به قطر پراکنده $\{a_{۱\alpha'(۱)},...,a_{n\alpha'(n)}\}$ تبدیل می‌شود که برای هر $k\neq i,j$ داریم $\alpha'(k)=\alpha(k)$ و همچنین $\alpha'(i)=\alpha(j)$ و $\alpha'(j)=\alpha(i)$.
بنابراین علامت این قطر پراکنده منفی علامت قطر پراکنده اولی است. به صورت مشابه اگر جای دو ستون ماتریس را عوض کنیم علامت قطر پراکنده جدید منفی علامت قطر پراکنده قبلی خواهد بود. از آنجا که قطر اصلی ماتریس متناظر جایگشت همانی است و علامت آن برابر ۱ است، علامت یک قطر پراکنده برابر ۱ است اگر بتوان آن را با زوج جابجایی سطرها و ستون‌های ماتریس به قطر اصلی تبدیل کرد. در غیر این صورت علامت آن ۱− است. با توجه به این موضوع و رابطه

$$\det A=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{n\alpha(n)}$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس باید برای هر قطر پراکنده حاصل ضرب درایه‌های آن را بدست آوریم و در علامت آن قطر ضرب کنیم و عددهای بدست آمده را با هم جمع کنیم. از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}\det A=\sum_{\alpha\in S^n}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{n\alpha(n)}&=\sum_{j=۱}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in S^n\\ \alpha(i)=j}}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{n\alpha(n)}\\&=a_{i۱}\sum_{\alpha(i)=۱}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{i-۱\alpha(i-۱)}a_{i+۱\alpha(i+۱)}...a_{n\alpha(n)}+\\&\quad\cdots+a_{in}\sum_{\alpha(i)=n}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{i-۱\alpha(i-۱)}a_{i+۱\alpha(i+۱)}...a_{n\alpha(n)}\end{aligned}$$

مجموع jام در رابطه بالا جمع روی همه قطرهای پراکنده ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A است. بنابراین به نظر می‌آید که رابطه تنگاتنگی با دترمینان این ماتریس دارد. یک قطر پراکنده ماتریس را که شامل درایه ijام است در نظر بگیرید (یعنی برای آن داریم $\alpha(i)=j$) با جابجا کردن ستون jام به صورت متوالی با ستون‌های سمت چپ خود، ستون jام به ستون اول تبدیل می‌شود ولی ترتیب قرار گرفتن ستون‌های دیگر نسبت به هم عوض نمی‌شود. برای این کار $j-۱$ جابجایی ستون‌ها لازم بود. حال با جابجا کردن سطر iام ماتریس حاصل با سطرهای بالایی، سطر iام به سطر اول تبدیل می‌شود و ترتیب قرار گرفتن سطرهای دیگر نیز نسبت به هم تغییری نمی‌کند. تعداد این جابجایی‌ها نیز برابر $i-۱$ است. با این کار درایه ijام قطر پراکنده اول به درایه سطر اول و ستون اول ماتریس تبدیل می‌شود و ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون این درایه با ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون اول ماتریس جدید هیچ تفاوتی نمی‌کند.
اگر با k جابجایی سطرها و ستون‌ها در ماتریس کوچکتر، قطر پراکنده به قطر اصلی تبدیل شود، قطر پراکنده اولی با $k+i+j-۲$ جابجایی سطرها و ستون‌ها به قطر اصلی ماتریس بزرگ تبدیل می‌شود. بنابراین علامت قطر پراکنده ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام برابر $(-۱)^{i+j}$ برابر علامت قطر پراکنده اولی است. به این ترتیب

$$\sum_{\alpha(i)=j}\varepsilon_\alpha a_{۱\alpha(۱)}...a_{i-۱\alpha(i-۱)}a_{i+۱\alpha(i+۱)}...a_{n\alpha(n)}=(-۱)^{i+j}\det A^{ij}$$

در نتیجه

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}$$

وارون یک ماتریس وارون‌پذیر به کمک دترمینان

قضیه: فرض کنید A ماتریسی وارون‌پذیر و A^{ij} ماتریس حاصل از حذف کردن سطر و ستون درایه ijام ماتریس A باشد. در این صورت

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} . (-1)^{i+j} \det A^{ji}$$

اثبات .فرض کنید C ماتریسی با درایه‌های بالا باشد یعنی

$$(C)_{ij} = \frac{1}{\det A} . (-1)^{i+j} \det A^{ji}$$

آنگاه درایه ij ام ماتریس AC برابر است با

$$\begin{aligned}(AC)_{ij} &= (A)_{i1}(C)_{1j} + \cdots + (A)_{in}(C)_{nj} \\ &= \frac{1}{\det A} \quad a_{i1}(-1)^{1+j} \det A^{j1} + a_{i2}(-1)^{2+j} \det A^{j2} + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j} \det A^{jn}\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز بسیار شبیه بسط دترمینان ماتریس A نسبت به سطر j ام است ولی بجای درایه‌های $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ درایه‌های $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ ظاهر شده اند. این عبارت در واقع برابر دترمینان $\tilde{A}$ است که همه سطرهای آن بجز سطر jام با سطرهای A برابر است و سطر jام آن نیز برابر سطر iام ماتریس A است. زیرا

$$\tilde{A}^{j1} = A^{j1}, \ldots, \tilde{A}^{jn} = A^{jn} \qquad (\tilde{A})_{j1} = (A)_{i1} = a_{i1}, \ldots, (\tilde{A})_{jn} = (A)_{jn} = a_{jn}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\det \tilde{A} &= (-1)^{1+j} (\tilde{A})_{j1} \det \tilde{A}^{j1} + \cdots + (-1)^{n+j} (\tilde{A})_{jn} \det \tilde{A}^{jn} \\ &= (-1)^{1+j} a_{i1} \det A^{j1} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{jn} \det A^{jn}\end{aligned}$$

اگر $j \neq i$ آنگاه ماتریس $\tilde{A}$ دارای دوسطر مساوی است و در نتیجه دترمینان آن صفر است. اگر $i = j$ آنگاه $\tilde{A} = A$ و در نتیجه دترمینان آن برابر دترمینان ماتریس A است. بنابراین $(AC)_{ij}$ در حالت $i \neq j$ برابر صفر است و در حالت $i = j$ برابر یک است. در نتیجه $AC = I$، یعنی ماتریس C وارون ماتریس A است.

---

۷. چند جمله‌ای‌ها

مقدمه

یک چند جمله‌ای با ضرایب در میدان F عبارتی به شکل

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

است که n یک عدد صحیح نامنفی است و برای هر k، a_k عضوی از میدان F است که به آن ضریب x^k می‌گوییم. اگر همه ضرایب صفر باشد به f چند جمله‌ای صفر می‌گوییم و می‌نویسیم

$$f(x) = 0$$

در هر چندجمله‌ای ناصفر توانی از x وجود دارد که ضریب آن صفر نیست. به بزرگ‌ترین توان x در یک چند جمله‌ای ناصفر که دارای ضریب ناصفر است، درجه آن چند جمله‌ای می‌گوییم. معمولاً یا برای چند جمله‌ای صفر درجه‌ای تعریف نمی‌کنند و یا آن را برابر $-\infty$ قرار می‌دهند. دلیل این موضوع در بحث جمع و ضرب چند جمله‌ای‌ها روشن می‌شود. ما درجه چند جمله‌ای f را با $\deg(f)$ نمایش می‌دهیم و درجه چند جمله‌ای صفر را برابر $-\infty$ تعریف می‌کنیم. با قرار دادن عضو دلخواه $c \in F$ بجای x حاصل عبارت بالا عضو دیگری در میدان است که به آن مقدار چند جمله‌ای f در c (یا مقدار چند جمله‌ای f به ازای $x = c$) می‌گوییم و می‌نویسیم

$$f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n$$

به این ترتیب هر چند جمله‌ای را می‌توان به عنوان یک تابع روی F در نظر گرفت. دو چند جمله‌ای f و g را برابر گوییم هرگاه ضریب هر توان x در دو چند جمله‌ای با هم برابر باشد. بنابراین درجه‌های دو چند جمله‌ای برابر، یکسان است. توجه کنید که اگر میدان F متناهی باشد تعداد توابع از F به F متناهی است. در حالی که تعداد چند جمله‌ای‌های با ضریب در F نامتناهی است. بنابراین اگر چه یک چندجمله‌ای را می‌توان به عنوان یک تابع روی F در نظر گرفت ولی مفهوم آن وسیع‌تر از مفهوم یک تابع است. البته جلوتر می‌بینیم که اگر F نا متناهی باشد، دو چند جمله‌ای f و g روی F با هم برابرند اگر و تنها اگر f و g به عنوان دو تابع روی F با هم برابر باشند.
مجموعه همه چند جمله‌ای‌های روی F را با $F(x)$ یا $P(F)$ و یا به صورت خلاصه‌تر با P نمایش می‌دهند. تناظر

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \to (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

تناظری یک به یک و پوشا بین مجموعه دنباله‌هایی در F که از جایی به بعد صفر می‌شوند و $F(x)$ است. چون مجموعه دنباله‌هایی در F که از جایی به بعد صفر می‌شوند یک فضای برداری روی F است، با توجه به تناظر بالا $F(x)$ نیز یک فضای برداری روی F خواهد بود.
جمع و ضرب اسکالر القایی روی $F(x)$ در ادامه معرفی می‌شوند.
جمع دو چند جمله‌ای $f(x) = \sum a_ix^i$ و $g(x) = \sum b_ix^i$ به صورت زیر است

$$h = f + g = f(x) + g(x) = \sum a_ix^i + \sum b_ix^i = \sum (a_i + b_i)x^i$$

به عبارت دیگر جمع دو چند جمله‌ای f و g چند جمله‌ای h است که ضریب x^k در آن برابر مجموع ضریب‌های x^k در دو چند جمله‌ای f و g است. بنابراین

$$\deg f + g \leq \max\{\deg f + \deg g\}$$

اگر $\deg f \neq \deg g$ در این صورت نامساوی قبل حتماً تساوی خواهد بود. با توجه به اینکه درجه چند جمله‌ای صفر را برابر $-\infty$ تعریف کردیم رابطه بالا همیشه درست است.
ضرب یک اسکالر $c \in F$ در چند جمله‌ای f، چند جمله‌ای l است که ضریب x^k در آن c برابر ضریب x^k در f است. به عبارت دیگر

$$l = cf = cf(x) = c\sum a_i x^i = \sum (ca_i)x^i$$

اگر $c \neq ۰$ باشد در این صورت $\deg cf = \deg f$. این رابطه برای چندجمله‌ای صفر نیز درست است.
علاوه بر جمع و ضرب اسکالر بالا که مجموعه چند جمله‌ای‌ها با آن یک فضای برداری است ضرب دو چندجمله‌ای را نیز می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم

$$f.g = f(x).g(x) = (\sum a_i x^i)(\sum b_j x^j) = \sum a_i b_j x^i x^j = \sum a_i b_j x^{i+j} = \sum c_k x^k$$

که در آن $c_k = a_k b_۰ + a_{k-۱} b_۱ + \cdots + a_۰ b_k$.

توجه داشته باشید که $\deg f.g = \deg f + \deg g$ و این رابطه حتی زمانی که f و یا g صفر اند نیز برقرار است.
بنابراین $F(x)$ یک فضای برداری روی F است که اعضای آن را در هم نیز می‌توان ضرب کرد. به سادگی می‌توان بررسی کرد که ضرب چندجمله‌ای‌ها دارای خواص زیر است

۱. شرکت پذیری. برای هر $f, g, h \in F(x)$، $(f.g).h = f.(g.h)$

۲. پخش شدن ضرب روی جمع. برای هر $f, g, h \in F(x)$ داریم

$$(g+h).f = g.f + h.f \qquad f.(g+h) = f.g + f.h$$

۳. برای هر $f, g \in F(x)$ و هر $c \in F$ داریم $c(f.g) = (cf).g = f.(cg)$.

۴. جابجایی. برای هر $f, g \in F(x)$ داریم $f.g = g.f$.

۵. وجود یک یا عضو خنثی عمل ضرب. ضرب هر چند جمله‌ای در چند جمله‌ای ثابت $f(x) = ۱$ برابر خود همان چندجمله‌ای است.

۶. عدم وجود مقسوم علیه صفر. اگر $f.g = ۰$ آنگاه یا $f = ۰$ است و یا $g = ۰$.

فضای برداری Z روی میدان F را یک *جبر روی میدان* F می‌گوییم هرگاه اعضای آن را بتوان در هم ضرب کرد به گونه‌ای که حاصل آن باز عضوی از Z باشد. به علاوه این عمل شرکت پذیر بوده و نسبت به جمع پخش شود و برای هر $z_۱, z_۲ \in Z$ و $c \in F$،

$$c(z_۱.z_۲) = (cz_۱).z_۲ = z_۱.(cz_۲)$$

یک جبر را *جبر جابجایی* گوییم هرگاه عمل ضرب جابجایی باشد.
یک جبر را *جبر یک‌دار* گوییم هرگاه عمل ضرب دارای عضو خنثی باشد. این عضو را یک می‌نامیم.
مثال. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F است. مجموعه عملگرهای روی V یک فضای برداری روی F است. اگر ضرب دو عملگر T و L را ترکیب آنها تعریف کنیم، یعنی $T.L = T \circ L$، در این صورت واضح است که مجموعه عملگرها یک جبر روی F تشکیل می‌دهند. این جبر یک‌دار است و عضو یک آن نگاشت همانی است. اما این جبر جابجایی نیست و مقسوم علیه صفر می‌تواند داشته باشد.
فرض کنید $\{u, v\}$ یک مجموعه مستقل خطی در V باشد که آن را به پایه α برای V گسترش داده‌ایم. فرض کنید برای عملگر T داشته باشیم $T(u) = u$ و اثر T روی بقیه اعضای پایه α صفر است. همچنین فرض کنید برای عملگر L داشته باشیم $L(v) = u$ و اثر L روی بقیه اعضای پایه α صفر است. در این صورت واضح است که $LT = ۰$ چون اثر آن روی همه اعضای پایه α صفر است. این در حالی است که $TL = L$ زیرا

$$TL(v) = T(L(v)) = T(u) = u = L(v)$$

و اثر L و TL روی بقیه اعضای پایه α صفر است. بنابراین $LT = L \neq 0$.
مثال. یک میدان روی خودش یا روی یک زیر میدانش یک جبر یک‌دار جابجایی بدون مقسوم علیه صفر است.
مثال. اگر V یک فضای برداری یک بعدی باشد، مجموعه عملگرهای روی V یک جبر جابجایی یک‌دار بدون مقسوم علیه صفر است. (در واقع این مجموعه همان میدان F است که بنابر مثال بالا یک جبر یک‌دار جابجایی بدون مقسوم علیه صفر است.)
مثال. مارتیس‌های $n \times n$ یک جبر یک‌دار تشکیل می‌دهند. عضو یک این جبر ماتریس همانی است. این جبر جابجایی نیست و مقسوم علیه صفر می‌تواند داشته باشد. این جبر به تعبیری نمایش ماتریسی جبر عملگرهای روی یک فضای برداری در یک پایه مانند α است.
تنها جبرهایی که در اینجا برای ما مهم هستند جبر چندجمله‌ای‌ها، جبر ماتریس‌های $n \times n$ و جبر عملگرها روی یک فضای برداری است.
فرض کنید Z یک جبر یک‌دار روی میدان F و $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ یک چند جمله‌ای دلخواه با ضرایب در F است. با قرار دادن عضو دلخواه $z \in Z$ بجای x، عبارت زیر بدست می‌آید.

$$f(z) = a_0 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

در عبارت بالا ۱ همان یک Z است. به این ترتیب حاصل عبارت بالا عضوی از Z خواهد بود. بنابراین چندجمله‌ای f را می‌توان به عنوان یک تابع روی جبر Z نیز در نظر گرفت.

قضیه. فرض کنید Z جبری یک‌دار روی میدان F و f و g دو چند جمله‌ای با ضرایب در F باشند. در این صورت برای هر $z \in Z$ و $c \in F$ داریم

۱. $(cf + g)(z) = cf(z) + g(z)$.

۲. $(f.g)(z) = f(z).g(z)$.

اثبات.توجه کنید که اگر Z یک جبر روی میدان F، z عضوی از آن و a و b دو اسکالر در F باشند آنگاه

$$(a+b)z = az + bz \quad z^i.z^j = z^{i+j} \quad (az^i)(bz^j) = abz^{i+j}$$

حال فرض کنید $f = \sum_i a_i x^i$ و $g = \sum_j b_j x^j$. در این صورت

$$cf + g = \sum_i (ca_i + b_i) x^i$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(cf+g)(z) &= \sum_i (ca_i + b_i) z^i \\ &= \sum_i ca_i z^i + b_i z^i \\ &= c\sum_i a_i z^i + \sum_i b_i z^i \\ &= cf(z) + g(z)\end{aligned}$$

همچنین $f.g = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j}$ بنابراین

$$\begin{aligned}f.g(z) &= \sum_{i,j} a_i b_j z^{i+j} \\ &= \sum_{i,j} (a_i z^i)(b_j z^j) \\ &= (\sum_i a_i z^i)(\sum_j b_j z^j) = f(z).g(z)\end{aligned}$$

نتیجه. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و f و g دو چند جمله‌ای با ضرایب در F باشند. برای هر عملگر T روی V و هر $c \in F$ داریم

- $(cf+g)(T) = cf(T) + g(T)$
- $g(T).f(T) = (g.f)(T) = (f.g)(T) = f(T).g(T)$

اگر A ماتریسی مربعی باشد آنگاه

- $(cf+g)(A) = cf(A) + g(A)$
- $g(A).f(A) = (g.f)(A) = (f.g)(A) = f(A).g(A)$

اگر α یک پایه برای V باشد آنگاه $[p(T)]_\alpha^\alpha = p([T]_\alpha^\alpha)$

بنابراین هر دو چندجمله‌ای بر حسب T با هم جابجا می‌شوند.

ویژگی‌های مهم چند جمله‌ای‌ها

قضیه. فرض کنید f و g دو چند جمله‌ای با ضرایب در میدان F اند و $g \neq 0$. در این صورت چند جمله‌ای‌های یکتای q و r چنان وجود دارند که $f = qg + r$ و $\deg r < \deg g$.

اثبات. برای اثبات از استقرا روی درجه f استفاده می‌کنیم. حکم قضیه زمانی که f چند جمله‌ای صفر یا ثابت است واضح است. فرض کنید حکم قضیه وقتی f یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n باشد صحیح است و

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \ : a_n \neq 0$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \ : b_m \neq 0$$

اگر $n = \deg f < \deg g = m$ کافی است قرار دهیم $q = 0$ و $r = f$. پس فرض می‌کنیم $n \geq m$. اگر قرار دهیم $q_1(x) = a_m^{-1}a_nx^{n-m}$، در این صورت $\deg(f - q_1g) < n$. بنابر فرض استقرا برای چند جمله‌ای $f_1 = f - q_1g$، چند جمله‌ای‌های r و q_2 یافت می‌شوند که

$$\deg r < \deg g \text{ و } f_1 = q_2g + r$$

در این صورت داریم $f = f_1 + q_1g = (q_2 + q_1)g + r$ و $\deg r < \deg g$. بنابر این حکم قضیه برای f نیز درست خواهد بود. برای اثبات یکتایی فرض کنید $f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$ که $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$. در این صورت $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ و بنابراین $\deg(q_1 - q_2)g = \deg(r_2 - r_1)$. اگر $(q_1 - q_2) \neq 0$ آنگاه

$$\deg((q_1 - q_2)g) = \deg(q_1 - q_2) + \deg g \geq \deg g$$
$$\deg(r_2 - r_1) \leq \max\{\deg r_1, \deg r_2\} < \deg g$$

این تناقض نشان می‌دهد که $q_1 - q_2$ باید صفر باشد. بنابراین $q_1 = q_2$ و در نتیجه

$$r_1 = f - q_1g = f - q_2g = r_2$$

با فرض‌های قضیه بالا، q را *خارج قسمت تقسیم* f *بر* g و r را *باقیمانده* این تقسیم می‌نامیم. اگر باقیمانده تقسیم f بر g صفر باشد در این صورت می‌گوییم f بر g *بخش پذیر* است و یا g چندجمله‌ای f را *می‌شمارد* و می‌نویسیم $g \mid f$.

قضیه. فرض کنید A یک مجموعه از چند جمله‌ای‌ها با خواص زیر است،

1. **A تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. به عبارت دیگر A یک زیر فضای برداری از $F(x)$ است.**
2. **حاصل ضرب هر چند جمله‌ای در هر عضو A باز عضوی از A است.**

در این صورت $\mathcal{A}$ مجموعه مضارب یک چند جمله‌ای مانند g است. یعنی

$$\mathcal{A}=\{qg : q\in F(x)\}$$

اثبات. اگر $\mathcal{A}$ تنها شامل چند جمله‌ای صفر باشد که حکم واضح است. در این حالت g برابر صفر است. در غیر این صورت فرض کنید g یک چند جمله‌ای ناصفر با کمترین درجه در $\mathcal{A}$ است. نشان می‌دهیم $\mathcal{A}$ مجموعه مضارب این چند جمله‌ای است. توجه کنید که بنابر ویژگی (۲) همه مضارب g در $\mathcal{A}$ هستند. عضو دلخواه $f\in\mathcal{A}$ را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه قبل چند جمله‌ای‌های q و r یافت می‌شوند که $f=qg+r$ و $\deg r<\deg g$. بنابه ویژگی (۲) $qg\in\mathcal{A}$ و بنابر ویژگی (۱)، $r=f-qg\in\mathcal{A}$. اگر r ناصفر باشد یک چند جمله‌ای ناصفر با درجه کمتر از درجه g در $\mathcal{A}$ خواهد بود که خلاف فرض ما در مورد g است. بنابراین r باید صفر باشد و در نتیجه $f=gq$.

نکته. در قضیه بالا اگر $\mathcal{A}\neq\{۰\}$ با تقسیم g بر ضریب بزرگترین توان x در آن می‌توان فرض کرد که g یک چند جمله‌ای تکین است. با این فرض برای g، این چندجمله‌ای یکتا خواهد بود. زیرا اگر $g_۱$ و $g_۲$ دو چندجمله‌ای تکین با این ویژگی باشند آنگاه $g_۱=qg_۲$ و $g_۲=\tilde{q}g_۱$ و

$$g_۱=q\tilde{q}g_۱ \qquad\Rightarrow\qquad \deg g_۱=\deg g_۱+\deg q+\deg\tilde{q}$$

چون q و $\tilde{q}$ چندجمله‌ای‌های ناصفری هستند رابطه بالا نتیجه می‌دهد که $\deg q=\deg\tilde{q}=۰$. از آنجا که $g_۱$ و $g_۲$ دو چندجمله‌ای تکین هستند q و $\tilde{q}$ باید یک باشند.

نتیجه. فرض کنید $f_۱,\dots,f_n$ چند جمله‌ای‌هایی ناصفر با ضرایب در میدان F باشند. چند جمله‌ای تکین یکتای g وجود دارد که مجموعه $\mathcal{A}=\{q_۱f_۱+\cdots+q_nf_n : q_i\in F(x)\}$ مجموعه مضارب g است.

اثبات. $\mathcal{A}\neq\{۰\}$ است و در شرایط قضیه قبل صدق می‌کند.

چند جمله‌ای g که در گزاره بالا معرفی شد، همه چندجمله‌ای‌های $f_۱,\dots,f_n$ را می‌شمارد. بنابراین مقسوم علیه مشترک همه $\{f_۱,\dots,f_n\}$ است. فرض کنید q نیز مقسوم علیه مشترک $f_۱,\dots,f_n$ باشد. چون $g\in\mathcal{A}$ داریم

$$g=q_۱f_۱+q_۲f_۲+\cdots+q_nf_n=q_۱(s_۱q)+\cdots+q_n(s_nq)=(q_۱s_۱+\cdots+q_ns_n)q$$

بنابراین $q\mid g$. به عبارت دیگر g بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $\{f_۱,\dots,f_n\}$ است.

فرض کنید $f_۱,\dots,f_n$ چند جمله‌ای‌هایی ناصفر با ضرایب در میدان F باشند و $\mathcal{A}=\{q_۱f_۱+\cdots+q_nf_n : q_i\in F(x)\}$. به چند جمله‌ای تکین یکتای g که مجموعه $\mathcal{A}$ مجموعه مضارب آن است، *بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک* $f_۱,\dots,f_n$ می‌گوییم. چند جمله‌ای f را *تحویل پذیر* می‌نامیم هرگاه به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای با درجه ناصفر باشد. در غیر این صورت f را *تحویل ناپذیر* گوییم. چند جمله‌ای‌های تحویل ناپذیر غیر اسکالر را *اول* می‌گوییم. چند جمله‌ای‌های $f_۱,\dots,f_n$ را *نسبت به هم اول* گوییم هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم علیه آنها برابر ۱ باشد.

قضیه. اگر یک چند جمله‌ای اول حاصل ضرب دو چند جمله‌ای را بشمارد آنگاه یکی از آن دو را نیز می‌شمارد.

اثبات. فرض کنید p یک چند جمله‌ای اول است که حاصل ضرب $f.g$ را می‌شمارد. می‌توان فرض کرد که p تکین است. در این صورت تنها مقسوم علیه‌های تکین آن ۱ و p هستند. بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک p و f یا ۱ است و یا p. اگر p باشد که حکم قضیه حاصل است، زیرا $p\mid f$. اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک p و f برابر ۱ باشد آنگاه چند جمله‌ای‌های a و b یافت می‌شوند که $۱=af+bp$. با ضرب این رابطه در g بدست می‌آوریم $g=afg+bgp$. چون p، $f.g$ را می‌شمارد عبارت سمت راست این تساوی بر p بخش پذیر است. بنابراین p، g را می‌شمارد.

نتیجه. اگر یک چند جمله‌ای اول حاصل ضرب تعدادی چند جمله‌ای را بشمارد آنگاه یکی از آنها را نیز می‌شمارد.

اثبات. با یک استقرای ساده از قضیه قبل به دست می‌آید.

قضیه. هر چند جمله‌ای تکین دارای نمایشی یکتا (بدون در نظر گرفتن ترتیب) به صورت حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های اول تکین است.

اثبات. برای اثبات وجود چنین نمایشی توجه کنید که درجه حاصل ضرب تعدادی چند جمله‌ای برابر مجموع درجه‌های آنها است. بنابراین یک چندجمله‌ای غیر اسکالر مانند f حاصل ضرب حداکثر $\deg(f)$ تا چند جمله‌ای غیر اسکالر است. فرض کنید n برابر حداکثر تعداد چند جمله‌ای‌های تکین غیر اسکالر است که حاصل ضرب آنها برابر f می‌شود و $f = p_1 ... p_n$ یکی از این نمایش‌هاست. هر یک از p_i ها باید اول باشد زیرا در غیر این صورت خود حاصل ضرب حداقل دو چند جمله‌ای تکین غیر اسکالر است و f به صورت حاصل ضرب $n+1$ چند جمله‌ای تکین غیر اسکالر نیز خواهد بود که خلاف فرض ما در مورد n است.
یکتایی چنین نمایشی را به کمک استقرا روی درجه f نشان می‌دهیم. اگر درجه f برابر یک باشد که حکم واضح است. فرض کنید درجه f برابر n است و حکم برای چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از n صحیح است. فرض کنید $f = p_1 ... p_k = q_1 ... q_l$ دو نمایش برای f به صورت حاصل ضرب عوامل تکین اول باشد. p_k چند جمله‌ای تکین اولی است که حاصل ضرب $q_1 ... q_l$ را می‌شمارد بنابراین باید یکی از آنها را بشمارد. می‌توانیم فرض کنیم $q_l \mid p_k$. چون q_l نیز یک چند جمله‌ای تکین اول است، باید داشته باشیم $p_k = q_l$ و در نتیجه با حذف آن از تساوی بالا خواهیم داشت $f_1 = p_1 ... p_{k-1} = q_1 ... q_{l-1}$. درجه f_1 کمتر از درجه f است. بنابراین طبق فرض استقرا $k-1 = l-1$ و $q_1, ..., q_{l-1}$ صرف نظر از ترتیب همان $p_1, ..., p_{k-1}$ اند. در نتیجه حکم قضیه برای f نیز برقرار است.

نتیجه. یک چند جمله‌ای تکین غیر اسکالر f، صرف نظر از ترتیب دارای نمایشی یکتا به صورت

$$f = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$$

است که در آن p_i ها چند جمله‌ای‌های تکین اول متمایزی اند.

نکته. چند جمله‌ای‌های درجه یک اول اند.

اثبات. از آنجا که درجه حاصل ضرب دو چند جمله‌ای برابر مجموع درجه آنها است و درجه حاصل ضرب دو چند جمله‌ای غیر اسکالر از دو کمتر نمی‌تواند باشد. در نتیجه یک چند جمله‌ای درجه یک نمی‌تواند به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای غیر اسکالر باشد.

قضیه. $(x-c)$ چند جمله‌ای f را می‌شمارد اگر و تنها اگر $f(c) = 0$.

اثبات. باقیمانده تقسیم f بر $(x-c)$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از $\deg(x-c) = 1$ است. بنابراین این باقیمانده باید اسکالر باشد. بنابراین $f(x) = (x-c)q(x) + r$. با قرار دادن $x = c$ در این رابطه بدست می‌آید $f(c) = r$.

تعریف. $c \in F$ را *ریشه چند جمله‌ای* f می‌گوییم هر گاه $f(c) = 0$.

بنابراین ریشه‌های یک چند جمله‌ای متناظر عوامل اول تکین درجه یک آن است. به توان عامل $(x-c)$ در تجزیه f به عوامل اول *تکرر ریشه* c در چند جمله‌ای f می‌گوییم. از آنجا که تعداد عوامل اول یک چند جمله‌ای حداکثر برابر درجه آن است، تعداد ریشه‌های یک چند جمله‌ای با احتساب تکرر حداکثر برابر درجه آن چند جمله‌ای است.
اگر درجه همه عوامل اول f برابر یک باشد آنگاه

$$f(x) = a(x-c_1)^{\alpha_1} . \cdots . (x-c_k)^{\alpha_k}$$

که c_i ها ریشه‌های متمایز f اند و $\deg f = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. در این حالت می‌گوییم چند جمله‌ای f روی میدان F *شکافته می‌شود*.
فرض کنید f یک چند جمله‌ای تکین اول در $F(x)$ است ولی در میدان بزرگ‌تر $\tilde{F}$ دارای ریشه λ است. برای هر $g \in F(x)$، $g(\lambda)$ عضوی در $\tilde{F}$ است. مجموعه چنین اعضایی را با G نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$G = \{g(\lambda) : g \in F(x)\}$$

این مجموعه تحت جمع و ضرب بسته است. زیرا

$$g_1(\lambda).g_2(\lambda) = (g_1.g_2)(\lambda) \text{ و } g_1(\lambda) + g_2(\lambda) = (g_1 + g_2)(\lambda)$$

نشان می‌دهیم G یک میدان است. برای این کار باید نشان دهیم وارون ضربی هر عضو ناصفری از G در G قرار دارد.
نکته ۱.

$$G=\{r(x):r\in F(x),\deg r<\deg f\}$$

اثبات. فرض کنید g یک چند جمله‌ای دلخواه در $F(x)$ است. چند جمله‌ای‌های q و r در $F(x)$ وجود دارند. که $g=qf+r$ و $\deg r<\deg f$. چون $f(\lambda)=0$ داریم

$$g(\lambda)=q(\lambda)f(\lambda)+r(\lambda)=r(\lambda)$$

نکته ۲. فرض کنید $r(x)$ چندجمله‌ای ناصفری در $F(x)$ با درجه کمتر از f است. در این صورت چند جمله‌ای $q\in F(x)$ وجود دارد که $r(\lambda)q(\lambda)=1$.

اثبات. چون f تکین اول است، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک f و r یا برابر f است و یا ۱.

چون r چندجمله‌ای ناصفر با درجه کمتر از f است حالت اول نمی‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین چند جمله‌ای‌های $p,q\in F(x)$ وجود دارند که $pf+qr=1$. در نتیجه

$$1=(pf+qr)(\lambda)=p(\lambda)f(\lambda)+q(\lambda)r(\lambda)=q(\lambda)r(\lambda)$$

نکته ۳. فرض کنید $r_1,r_2\in F(x)$ دو چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه f اند. در این صورت $r_1(\lambda)=r_2(\lambda)$ اگر و تنها اگر $r_1=r_2$.

اثبات. اگر $r_1(\lambda)=r_2(\lambda)$ آنگاه $(r_1-r_2)(\lambda)=0$. چون $r=r_1-r_2$ یک چندجمله‌ای در $F(x)$ با درجه کمتر از درجه f است. طبق نکته بالا اگر $r\neq 0$ آنگاه $r(\lambda)$ وارون پذیر است، و چون در اینجا $r(\lambda)=0$ و صفر وارون پذیر نیست باید داشته باشیم $r=0$. در نتیجه $r_1=r_2$.

نتیجه. برای هر چندجمله‌ای غیر اسکالر $f\in F(x)$، میدانی شامل F وجود دارد که f در آن دارای ریشه است.

اثبات. کافی است این موضوع را برای یکی از عوامل تکین اول f نشان دهیم. بنابراین فرض می‌کنیم f تکین اول است.

کاملاً مشابه بالا با اضافه کردن نماد صوری λ و توان‌هایش به میدان F، که در رابطه $f(\lambda)=0$ صدق می‌کند، مجموعه زیر بدست می‌آید.

$$G=\{g(\lambda):g\in F(x)\}=\{r(\lambda):r\in F(x),\deg r<\deg f\}$$

جمع وضرب را می‌توانیم به صورت طبیعی روی G تعریف کنیم و مانند بالا نشان دهیم که G یک میدان است.

نتیجه. برای هر چندجمله‌ای غیر اسکالر $f\in F(x)$، میدانی شامل F وجود دارد که f در آن شکافته می‌شود.

نکته. اگر $f_1,\ldots,f_n$ در $F(x)$ نسبت به هم اول باشند آنگاه برای هر میدان $F\supset\tilde{F}$ آنها در $\tilde{F}(x)$ نیز نسبت به هم اول اند. به طور خاص این چند جمله‌ای‌ها در هیچ توسیعی از F دارای ریشه مشترک نیستند.

اثبات. چون $f_1,\ldots,f_n$ نسبت به هم اول اند چندجمله‌ای‌های $q_1,\ldots,q_n$ در $F(x)$ وجود دارند که $q_1f_1+\cdots+q_nf_n=1$. اگر $\tilde{F}$ توسیعی از F باشد آنگاه این رابطه در $\tilde{F}(x)$ نیز برقرار است. بنابراین f_iها در $\tilde{F}(x)$ نیز نسبت به هم اول اند. با توجه به این رابطه واضح است که f_iها نمی‌توانند ریشه مشترک در $\tilde{F}$ داشته باشند.

نتیجه. اگر p_1 و p_2 دو چندجمله‌ای اول متمایز در $F(x)$ باشند آنگاه در هیچ توسیعی از F دارای ریشه مشترک نیستند.

اثبات. کافی است دقت کنید که دو چند جمله‌ای اول متمایز نسبت به هم اول اند!

گزاره‌های زیر را نیز بدون اثبات در اینجا می‌آوریم.

قضیه اساسی جبر. هر چند جمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{C}$ دارای ریشه در $\mathbb{C}$ است.

بنابراین هر چند جمله‌ای در $\mathbb{C}(x)$ شکافته می‌شود. به میدان F که هر چند جمله‌ای با ضرایب در آن دارای ریشه در آن است میدان بسته جبری می‌گوییم.

درجه چندجمله‌ای‌های اول با ضرایب در $\mathbb{R}$ تنها می‌تواند یک یا دو باشد.

هر میدانی دارای توسیع بسته جبری است.

خلاصه مطالب این فصل

فرض کنید $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در میدان F است. همچنین فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و T یک عملگر روی V است. در این صورت $p(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n$ نیز یک عملگر روی V است. برای هر $f, g \in F(x)$ و $c \in F$ داریم

۱. $(cf + g)(T) = cf(T) + g(T)$

۲. $(f.g)(T) = f(T).g(T)$

بنابراین هر دو چندجمله‌ای برحسب T با یکدیگر جابجا می‌شوند.

فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در F است که در دو شرط زیر صدق می‌کند،

۱. $\mathcal{A}$ تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.

۲. حاصل ضرب هر چند جمله‌ای با ضرایب در F در هر عضو $\mathcal{A}$ باز عضوی از $\mathcal{A}$ است.

در این صورت چندجمله‌ای تکین یکتای g وجود دارد که $\mathcal{A}$ مجموعه مضارب آن است. یعنی

$$\mathcal{A} = \{qg : q \in F(x)\}$$

هر چند جمله‌ای غیر اسکالر تکین دارای نمایشی یکتا (صرف نظر از ترتیب) به صورت زیر است

$$f = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

که در آن p_iها چندجمله‌ای‌های تکین اول متمایزی هستند.

$(x - c)$ چندجمله‌ای f را می‌شمارد اگر و تنها اگر $f(\lambda) = 0$.

هر میدانی دارای توسیع بسته جبر است.

(قضیه اساسی جبر) $\mathbb{C}$ یک میدان بسته جبری است.

فرض کنید f_1 و f_2 نسبت به هم اول اند و $\tilde{F}$ توسیعی از F است. در این صورت f_1 و f_2 در $\tilde{F}$ دارای ریشه مشترک نیستند.

تمرین. هر میدانی یک فضای برداری روی یک زیر میدان خود است.

اگر x و y در توسیع $\tilde{F} : F$ جبری باشند، آنگاه $x + y$ و xy و $\frac{1}{x}$ نیز چنین اند.

توسیعی از F وجود دارد که جبری است و هر چند جمله‌ای با ضرایب در F دارای ریشه‌ای در آن است.

$\leftarrow$ با اجتماع چنین دنباله‌ای از توسیع‌ها، توسیع بسته جبری F بدست می‌آید.

اثبات جبری قضیه اساسی جبر.

اگر λ ریشه یک چندجمله‌ای حقیقی باشد آنگاه $\bar{\lambda}$ نیز ریشه‌ای از آن است.

---

۸. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقدمه

در فصل‌های گذشته دیدیم که نگاشت‌های خطی به شکل $T:V\to W$ در صورت مشخص کردن پایه‌های α و β به ترتیب برای V و W با ماتریس‌های $m\times n$ مشخص می‌شوند که در آن $n=\dim V$ و $m=\dim W$. زمانی که $W=V$ پایه α پایه‌ای برای فضای مقصد نیز است. بنابراین در این حالت انتخاب یک پایه کافی است. این کار مزایای زیر را نیز به همراه دارد.

۱. اگر T و U دو عملگر روی فضای برداری V باشند آنگاه $[TU]_\alpha^\alpha=[T]_\alpha^\alpha[U]_\alpha^\alpha$.

۲. برای هر عملگر T داریم $[T^n]_\alpha^\alpha=([T]_\alpha^\alpha)^n$.

۳. برای هر عملگر T و هر چند جمله‌ای p داریم $[p(T)]_\alpha^\alpha=p([T]_\alpha^\alpha)$.

۴. دترمینان عملگر T از روی ماتریس $[T]_\alpha^\alpha$ قابل محاسبه است. در واقع $\det T=\det[T]_\alpha^\alpha$.

اگر پایه‌های α و β برای V متفاوت باشند آنگاه نمایش ماتریسی عملگرهای روی فضای V هیچ یک از ویژگی‌های بالا را نخواهند داشت. بنابراین معمولاً زمانی که با عملگرهای خطی روی یک فضا سروکار داریم نمایش ماتریسی آنها در یک پایه مورد توجه ما قرار دارد. حال هر چه نمایش ماتریسی عملگر T در پایه α ساده‌تر باشد محاسبات مربوط به آن عملگر نیز ساده‌تر خواهد بود. هدف ما در این بخش یافتن پایه‌ای مانند α برای V است که نمایش $[T]_\alpha^\alpha$ تا حد امکان ساده باشد.

مثال. فرض کنید

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب $\alpha=\{v_1,v_2\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است. همچنین فرض کنید $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ عملگری است که با روابط زیر معرفی می‌شود.

$$T(v_1)=4v_1\ ,\qquad T(v_2)=2v_2$$

نمایش عملگر T در پایه α ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر آن ۲ و ۴ است. نمایش این عملگر را در پایه استاندارد نیز محاسبه می‌کنیم.

$$e_1=\frac{1}{2}(v_1-v_2)\ \Rightarrow\ T(e_1)=T(\frac{1}{2}(v_1-v_2))=2v_1-v_2=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=3e_1+e_2$$

$$e_2=\frac{1}{2}(v_1+v_2)\ \Rightarrow\ T(e_2)=T(\frac{1}{2}(v_1+v_2))=2v_1+v_2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=e_1+e_2$$

$$\Rightarrow [T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$$

حال فرض کنید می‌خواهیم نمایش عملگر T^n را نیز در پایه استاندارد محاسبه کنیم.

$$[T^n]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}=\left([T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}\right)^n=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}^n$$

اما محاسبه عبارت بالا برای nهای بزرگ کار دشواری است. در حالی که T^n در پایه $\{v_1,v_2\}$ دارای نمایش ساده‌ای است.

$$[T^n]_\alpha^\alpha = \left([T]_\alpha^\alpha\right)^n = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ۴^n & ۰ \\ ۰ & ۲^n \end{bmatrix}$$

به کمک این نمایش، نمایش $[T^n]_{\epsilon_۲}^{\epsilon_۲}$ نیز بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}^n = [T^n]_{\epsilon_۲}^{\epsilon_۲} = [I]_{\epsilon_۲}^{\alpha}[T^n]_\alpha^\alpha[I]_\alpha^{\epsilon_۲} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴^n & ۰ \\ ۰ & ۲^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

در این مثال اهمیت وجود پایه‌ای مانند α که نمایش عملگر T در آن ماتریس قطری باشد به روشنی مشخص است.

تعریف. عملگر $T : V \to V$ را *قطری شدنی* گوییم هرگاه پایه مرتب α وجود داشته باشد که $[T]_\alpha^\alpha$ یک ماتریس قطری باشد.

این تعریف را برای ماتریس‌های مربعی نیز می‌توان ارائه کرد. توجه کنید که ماتریس‌ها نمایش نگاشت‌های خطی اند. اگر یک ماتریس مربعی نمایش عملگری قطری شدنی باشد آنگاه آن را *قطری شدنی* می‌گوییم.

قضیه. ماتریس A قطری شدنی است اگر و تنها اکر با یک ماتریس قطری مشابه باشد. به عبارت دیگر A قطری شدنی است اگر و تنها اگر ماتریس وارون پذیر P وجود داشته باشد که $P^{-۱}AP$ ماتریسی قطری باشد.

اثبات. طبق تعریف یک ماتریس قطری شدنی است اگر و تنها اگر نمایش یک عملگر قطری شدنی باشد. بنابراین یک ماتریس قطری شدنی است اگر و تنها اگر عملگری وجود داشته باشد که نمایش آن در یک پایه برابر آن ماتریس و در پایه‌ای دیگر یک ماتریس قطری شود، یعنی یک ماتریس قطری شدنی است اگر و تنها اگر با یک ماتریس قطری مشابه باشد. در فصل‌های قبل دیدیم که دو ماتریس A و B مشابه اند اگر و تنها اگر ماتریس وارون‌پذیر P وجود داشته باشد که $B = P^{-۱}AP$.

برای توضیح بیشتر مطالب بالا فرض کنید A ماتریسی قطری شدنی باشد. در این صورت عملگر قطری شدنی T روی یک فضای برداری مانند V یافت می‌شود که A نمایش آن عملگر در پایه‌ای مانند β است. چون T قطری می‌شود پایه‌ای مانند α برای V یافت می‌شود که $[T]_\alpha^\alpha$ ماتریسی قطری باشد. اما

$$[T]_\alpha^\alpha = [ITI]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta[T]_\beta^\beta[I]_\beta^\alpha = P^{-۱}AP$$

که در بالا P یک ماتریس وارون پذیر است. به این ترتیب ماتریس A با یک ماتریس قطری مشابه است. بر عکس، اگر ماتریس وارون پذیر P وجود داشته باشد که $P^{-۱}AP$ یک ماتریس قطری باشد آنگاه A قطری شدنی است. زیرا فرض کنید که نمایش عملگر $T : V \to V$ در پایه β برابر ماتریس A باشد. در این صورت پایه α وجود دارد که $[I]_\beta^\alpha = P$ (نمایش اعضای پایه α در پایه β همان ستون‌های ماتریس P است). بنابراین

$$[T]_\alpha^\alpha = [ITI]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta[T]_\beta^\beta[I]_\beta^\alpha = P^{-۱}AP$$

در نتیجه عملگر T قطری می‌شود و بنابراین ماتریس A نیز قطری شدنی است.

قضیه. عملگر T در پایه $\alpha = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ قطری می‌شود اگر و تنها اگر برای هر i، $T(v_i) = \lambda_i v_i$.

اثبات.

$$T(v_i) = \lambda_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad \left[T(v_i)\right]_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$[T]_\alpha^\alpha = \big[[T(v_1)]_\alpha \mid \cdots \mid [T(v_n)]_\alpha\big] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بنابراین عملگر T در پایه $\{v_1,\ldots,v_n\}$ قطری می‌شود اگر هریک از راستاهای v_i توسط T به خودش نگاشته شود. به این ترتیب هر عملگری قطری نخواهد بود. زیرا دوران در $\mathbb{R}^2$ (با زاویه مخالف $k\pi$) عملگری خطی است که هیچ راستایی را به خودش نمی‌نگارد.

تعریف. بردار ناصفر $v \in V$ را که $T(v) = \lambda v$، *بردار ویژه* T می‌گویند. λ را نیز *مقدار ویژه عملگر* T متناظر با بردار ویژه v می‌گویند.

به صورت مشابه، بردار ناصفر $x \in F^n$ را *بردار ویژه ماتریس مربعی* A می‌گوییم هرگاه $Ax = \lambda x$ و λ را *مقدار ویژه ماتریس* A *متناظر بردار ویژه* x می‌گوییم.

نکته. اگر v بردار ویژه عملگر T متناظر مقدار ویژه λ باشد آنگاه v بردار ویژه عملگر $p(T)$ نیز است و مقدار ویژه متناظر با آن برابر است با $p(\lambda)$. به عبارت دیگر اگر $T(v) = \lambda v$ آنگاه $p(T)(v) = p(\lambda)v$.

اثبات. با استقرا و به سادگی ثابت می‌شود که برای هر n داریم $T^n(v) = \lambda^n v$. همچنین توجه کنید که

$$T(v) = \lambda v\,,\, U(v) = \mu v \quad \Rightarrow \quad (T+U)(v) = (\lambda+\mu)v$$

با توجه به این دو ویژگی نکته بالا به سادگی به دست می‌آید.

قضیه. λ مقدار ویژه عملگر T (یا ماتریس A) است اگر و تنها اگر $\det(T-\lambda I) = 0$ (یا $\det(A-\lambda I) = 0$)

اثبات.

$$\begin{aligned} \exists v \neq 0 : T(v) = \lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad \exists v \neq 0 : (T-\lambda I)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ker(T-\lambda I) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \det(T-\lambda I) = 0 \end{aligned}$$

فرض کنید A ماتریس نمایش عملگر T در پایه α باشد. در این صورت برای هر $\lambda \in F$ داریم

$$\det(T-\lambda I) = \det\left([T-\lambda I]_\alpha^\alpha\right) = \det\left([T]_\alpha^\alpha - \lambda I\right) = \det(A-\lambda I)$$

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A - \lambda I$ چند جمله ای‌های درجه یک بر حسب λاند و بقیه درایه‌ها ثابت اند. $\det(A-\lambda I)$ برابر است با مجموع حاصل ضرب علامت دار درایه‌های روی قطرهای پراکنده این ماتریس. حاصل ضرب درایه‌های روی یک قطر پراکنده یک چندجمله‌ای درجه کمتر یا مساوی با n بر حسب λ است و تنها قطر پراکنده‌ای که حاصل ضرب درایه هایش یک چندجمله‌ای درجه n است قطر اصلی است که ضریب λ^n در آن برابر $(-1)^n$ است. علامت قطر اصل نیز برابر یک است. بنابراین $\det(A-\lambda I)$ یک چندجمله‌ای درجه n بر حسب λ است و ضریب λ^n نیز در آن برابر $(-1)^n$ است.

تعریف. $P_T(\lambda) = \ker(T-\lambda I)$ را *چندجمله‌ای مشخصه عملگر* T می‌گوییم. به صورت مشابه $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ را *چندجمله‌ای مشخصه ماتریس* A می‌گوییم.

طبق قضیه بالا مقادیر ویژه عملگر T (یا ماتریس A) ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه آن هستند.

فرض کنید λ یک ریشه چندجمله‌ای مشخصه عملگر T باشد. بردارهای ویژه متناظر مقدار ویژه λ بردارهای ناصفر $\ker(T-\lambda I)$ اند. به زیرفضای $\ker(T-\lambda I)$ *فضای ویژه عملگر* T *متناظر مقدار ویژه* λ می‌گوییم و معمولاً آن را با V_{λ_i} نمایش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنید $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مشخصه عملگر T باشند. در این صورت فضاهای ویژه $V_{\lambda_1},\ldots,V_{\lambda_k}$ مستقل خطی اند.

اثبات اول. به صورت استقرایی نشان می‌دهیم این زیرفضاها مستقل خطی اند. فرض کنید نشان داده ایم $V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_s}$ مستقل خطی اند (پایه استقرا یعنی $s=1$ واضح است). اگر $v_1+\cdots+v_s+v_{s+1}=0$ که در آن $v_i\in V_{\lambda_i}$، در این صورت

$$0=T(v_1+\cdots+v_{s+1})=T(v_1)+\cdots+T(v_{s+1})=\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_{s+1}v_{s+1}$$

با کم کردن λ_{s+1} برابر رابطه اول از رابطه بالا خواهیم داشت

$$(\lambda_1-\lambda_{s+1})v_1+\cdots+(\lambda_s-\lambda_{s+1})v_s=0$$

توجه کنید که $(\lambda_i-\lambda_{s+1})v_i\in V_{\lambda_i}$ و چون $V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_s}$ مستقل خطی اند برای هر $1\le i\le s$ باید داشته باشیم $(\lambda_i-\lambda_{s+1})v_i=0$. چون λ_iها متمایز اند، برای هر $1\le i\le s$ باید داشته باشیم $v_i=0$. بنابراین v_{s+1} هم باید صفر باشد. این نشان می‌دهد $V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_{s+1}}$ مستقل خطی است.

اثبات دوم. فرض کنید برای بردارهای $v_i\in V_{\lambda_i}$ داشته باشیم $v_1+\cdots+v_k=0$. با توجه به اینکه λ_iها متمایز اند برای هر i مقدار چند جمله‌ای زیر روی $\lambda_1,\dots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\dots,\lambda_k$ صفر و روی λ_i ناصفر است.

$$q_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)$$

با توجه به اینکه $T(v_j)=\lambda_j v_j$ خواهیم داشت $q_i(T)(v_j)=q_i(\lambda_j)v_j$. بنابراین برای $j\neq i$ داریم $q_i(T)(v_j)=0$. در نتیجه

$$0=q_i(T)(v_1+\cdots+v_k)=q_i(\lambda_1)v_1+\cdots+q_i(\lambda_k)v_k=q_i(\lambda_i)v_i$$

از آنجا که $q_i(\lambda_i)\neq 0$ باید داشته باشیم $v_i=0$. این استدلال برای هر i نشان می‌دهد که V_{λ_i}ها مستقل اند.

قضیه. T قطری شدنی است اگر و تنها اگر V برابر مجموع فضاهای ویژه T باشد.

نکته. از آنجایی که فضاهای ویژه مستقل خطی اند، مجموع آنها یک مجموع مستقیم است. بنابراین گزاره بالا را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: T قطری شدنی است اگر و تنها اگر V برابر مجموع مستقیم فضاهای ویژه T باشد.

اثبات. اگر T قطری شدنی باشد دارای یک پایه از بردارهای ویژه است. هر برداری در فضا به صورت ترکیب خطی اعضای این پایه است. بنابراین هر برداری به صورت مجموعی از بردارهای ویژه خواهد بود که نتیجه می‌دهد V برابر مجموع فضاهای ویژه T است.

حال فرض کنید V برابر مجموع فضاهای ویژه T است. چون این فضاها مستقل خطی اند V برابر مجموع مستقیم آنها است. در نتیجه اجتماع پایه‌های فضاهای ویژه، یک پایه برای V تشکیل می‌دهد. بنابراین V دارای پایه‌ای از بردارهای ویژه است، یعنی T قطری شدنی است.

تا کنون اهمیت بردارهای ویژه در ارائه نمایشی قطری برای یک عملگر روشن شد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که یک عملگر ممکن است اصلاً قطری شدنی نباشد، یعنی نمایشی قطری نداشته باشد. در چنین شرایطی باید به دنبال نمایش‌های ساده دیگری برویم که اگر چه به سادگی نمایش قطری نیستند اما کار کردن با آنها از نمایش‌های دیگر آن عملگر ساده‌تر باشد. برای این منظور مفهوم بردار ویژه و فضای ویژه را تعمیم می‌دهیم. توجه کنید که بردارهای ویژه یک عملگر در واقع به نوعی راستاهای ناوردا توسط آن عملگر بودند. بنابراین می‌توانیم بجای بررسی زیرفضاهای یک بعدی ناوردا توسط یک عملگر همه زیرفضاهایی را که توسط آن عملگر ناوردا هستند بررسی کنیم. این کار را به صورت مبسوط در قسمت بعد انجام می‌دهیم.

زیر فضاهای ناوردا

فرض کنید V_λ یک فضای ویژه T باشد. توجه داشته باشید که $T(V_\lambda)\subseteq V_\lambda$ و در نتیجه تحدید عملگر T به زیرفضای V_λ ، یک نگاشت خطی از V_λ به خودش است. با توجه به تعریف فضای ویژه، این نگاشت λ برابر همانی روی V_λ است.

به صورت کلی اگر W زیرفضای دلخواهی از V باشد که $T(W) \subseteq W$ ، تحدید T به آن، یک عملگر خطی روی W است که آن را با T_W نمایش می‌دهیم، $T_W := T|_W$. به این زیرفضاها، *زیرفضای ناوردا* توسط T ، یا به صورت خلاصه، *زیرفضای T-ناوردا* می‌گوییم.

زیرفضاهای بدیهی $\{0\}$ و V زیرفضاهایی ناوردا توسط همه عملگرها هستند.

گزاره. فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط بردارهای $v_1,\dots,v_k$ است. W یک زیر فضای T ناوردا است اگر و تنها اگر تصویر بردارهای $v_1,\dots,v_k$ توسط T داخل W قرار داشته باشد.

نتیجه. زیرفضای تولید شده توسط مجموعه‌ای از بردارهای ویژه عملگر T زیرفضایی T-ناوردا است.

گزاره. زیر فضای یک بعدی W یک زیر فضای T ناوردا است اگر و تنها اگر اعضای ناصفر آن بردار ویژه T باشند.

اثبات. فرض کنید v یک بردار ویژه عملگر T است. در این صورت زیرفضای یک بعدی $\langle v\rangle$ تحت T ناوردا است. همچنین اگر W یک زیرفضای یک بعدی T-ناوردا و v عضوی ناصفر در W باشد آنگاه $W=\langle v\rangle$ و $T(v)\in W=\langle v\rangle$. در نتیجه v یک بردار ویژه T است.

بنابراین زیر فضاهای ناوردا می‌توانند به عنوان تعمیمی از بردارهای ویژه معرفی شوند. گزاره زیر نیز اهمیت زیرفضاهای ناوردا را در بدست آوردن نمایش‌های ساده‌تر برای یک عملگر نشان می‌دهد.

قضیه. فرض کنید W زیر فضایی ناوردا توسط دو عملگر T و U است. در این صورت W توسط عملگرهای TU و $aT+bU$ نیز ناوردا است و داریم $(TU)_W=(T_W)(U_W)$ و $(aT+bU)_W=aT_W+bT_W$.

اثبات. برای هر $w\in W$ داریم $T(w),U(w)\in W$. بنابراین

$$aT(w)+bU(w)\in W\,,\quad T(U(w))\in W$$

در نتیجه W توسط این عملگرها نیز ناوردا است و برای هر $w\in W$ داریم

$$\begin{gathered}T(w)=T_W(w),\quad U(w)=U_W(w),\quad T(U(w))=T_W(U(w))\\ (aT+bU)_W(w)=(aT+bU)(w)=aT(w)+bU(w)=(aT_W+bU_W)(w)\\ (TU)_W(w)=TU(w)=T_W(U(w))=T_WU_W(w)\end{gathered}$$

نتیجه. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای و W یک زیرفضای T-ناوردا است. در این صورت W یک زیرفضای $p(T)$-ناوردا نیز است و $p(T)_W=p(T_W)$.

قضیه. فرض کنید W یک زیرفضای T-ناوردا در V است. اگر β یک پایه برای W و α گسترش آن به پایه‌ای برای V باشد، آنگاه

$$[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}[T_W]_\beta^\beta & A\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

اثبات. چون W یک زیرفضای T-ناوردا است پس برای هر $v\in\beta$، $T(v)\in W$. بنابراین $T(v)$ به صورت ترکیب خطی اعضای β است و در نتیجه $[T(v)]_\alpha=\begin{bmatrix}[T_W(v)]_\beta\\ 0\end{bmatrix}$.

نتیجه. اگر W یک زیرفضای T-ناوردا باشد آنگاه $p_{T_W}(x)\mid p_T(x)$.

اثبات. فرض کنید β یک پایه برای W و α گسترش آن به پایه‌ای برای V باشد. با توجه به قضیه قبل داریم

$$\begin{aligned}p_T(x)=\det([T]_\alpha^\alpha-xI)&=\det\begin{bmatrix}[T_W]_\beta^\beta-xI & A\\ 0 & B-xI\end{bmatrix}\\ &=\det([T_W]_\beta^\beta-xI)\det(B-xI)=p_{T_W}(x)p_B(x)\end{aligned}$$

قضیه. فرض کنید $W_1,\dots,W_k$ زیرفضاهایی مستقل خطی و T-ناوردا باشند و $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$، همچنین فرض کنید $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ به ترتیب پایه‌هایی برای $W_1,\dots,W_k$ باشند. در این صورت نمایش T در پایه $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ به صورت زیر است

$$[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}[T_{W_1}]_{\alpha_1}^{\alpha_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & [T_{W_K}]_{\alpha_k}^{\alpha_k}\end{bmatrix}$$

اثبات. با یک استقرای ساده روی k و استفاده از روش ذکر شده در اثبات قضیه بالا به راحتی حکم به دست می‌آید.

بنابراین قضیه اگر V را بتوان به صورت مجموع مستقیم زیرفضاهای T-ناوردای کوچک نوشت، نمایش ساده‌ای برای عملگر T به دست می‌آید. توجه کنید که اگر W_iها یک بعدی باشند نمایش به دست آمده قطری خواهد بود. البته همیشه چنین تجزیه‌ای برای V وجود ندارد.

در ادامه روش‌هایی برای شناسایی و بدست آوردن زیر فضاهای ناوردای یک عملگر معرفی می‌شوند.

$\mathrm{Im}(T)$ و $\ker(T)$ زیرفضاهایی ناوردا توسط عملگر T اند. قضیه زیر زیرفضاهای Tناوردای بیشتری را ارائه می‌کند.

قضیه. برای هر چندجمله‌ای $p(x)$، $\ker(p(T))$ و $\mathrm{Im}(p(T))$ زیرفضاهایی T-ناوردا هستند.

اثبات. با توجه به اینکه T و $p(T)$ جابجا می‌شوند داریم

$$\begin{aligned} v\in\ker(p(T)) &\Rightarrow p(T)(v)=0\\ &\Rightarrow p(T)T(v)=Tp(T)(v)=0\\ &\Rightarrow T(v)\in\ker(p(T))\end{aligned}$$

به همین صورت

$$T.p(T)(V)=p(T).T(V)\subseteq p(T)(V)$$

در اثبات بالا تنها از اینکه T و $p(T)$ جابجا می‌شوند استفاده شد. بنابراین به صورت مشابه قضیه کلی‌تر زیر نیز برقرار است که البته ما از آن استفاده نمی‌کنیم و اثبات دقیق آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید T و L دو عملگر روی فضای برداری V باشند که با هم جابجا می‌شوند و W یک زیرفضای T-ناوردا در V باشد. در این صورت $L(W)$ و $L^{-1}(W)$ نیز زیرفضاهایی T-ناوردا هستند.

مثال. عملگر T را روی $\mathbb{R}^2$ با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$[T]_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین $T(e_1)=e_1$ و $T(e_2)=e_1+e_2$. e_1 بردار ویژه‌ای برای T است بنابراین $\{0\}$ و $\langle e_1\rangle$ و $\mathbb{R}^2$ زیرفضاهایی ناوردا تحت T هستند. نشان می‌دهیم زیرفضای ناوردای دیگری وجود ندارد، چون فضا دوبعدی است زیرفضاهای نابدیهی آن یک بعدی هستند و چون زیرفضاهای ناوردای یک بعدی متناظر بردارهای ویژه عملگر هستند به دنبال محاسبه بردارهای ویژه T می‌رویم.

$$p_T(\lambda)=\det(T-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^2$$

بنابراین تنها مقدار ویژه این عملگر $\lambda=1$ است. بردارهای ویژه آن به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix}1-1 & 1\\ 0 & 1-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad y=0$$

بنابراین فضای ویژه متناظر $\lambda = ۱$ همان $\langle e_۱ \rangle$ است. به این ترتیب نمایش ساده‌تری از آنچه در صورت مساله برای T داده شده وجود ندارد.

نکته. اشتراک دسته‌ای از زیرفضاهای T–ناوردا یک زیرفضای T–ناوردا است.

اثبات. فرض کنید W_αها زیرفضاهایی T–ناوردا باشند در این صورت برای هر α، $T(W_\alpha) \subseteq W_\alpha$. بنابراین

$$x \in \bigcap_\alpha W_\alpha \quad \Rightarrow \quad \forall\alpha : x \in W_\alpha \quad \Rightarrow \quad \forall\alpha : T(x) \in T(W_\alpha) \subseteq W_\alpha \quad \Rightarrow \quad T(x) \subseteq \bigcap_\alpha W_\alpha$$

اشتراک همه زیرفضاهای T–ناوردا که شامل یک بردار (یا یک مجموعه) اند خود یک زیرفضای T–ناوردا شامل آن بردار (یا آن مجموعه) است که در واقع کوچک‌ترین زیرفضا با این خاصیت است.

فرض کنید v عضوی ناصفر در V است. کوچک‌ترین زیرفضای T–ناوردا شامل v باید شامل بردارهای $v, T(v), T^۲(v), \ldots$ باشد. در واقع فضای تولید شده توسط این بردارها یک زیرفضای T–ناوردا است. زیرا تصویر این مجموعه مولد توسط T باز داخل این مجموعه است.

چون فرض کردیم V با بعد متناهی است زیرفضای $W = \langle v, T(v), T^۲(v), \ldots \rangle$ با متناهی تا از این بردارها تولید می‌شود. فرض کنید k بزرگ‌ترین عددی باشد که $\alpha = \{v, T(v), \ldots, T^{k-۱}(v)\}$ مستقل خطی است. در نتیجه $T^k(v)$ در زیرفضای $Z = \langle \alpha \rangle$ قرار دارد. بنابراین Z یک زیرفضای T–ناوردا شامل v است زیرا تصویر $v, T(v), \ldots, T^{k-۱}(v)$ که مولد Z است توسط T داخل Z قرار دارد. از آنجایی که W کوچک‌ترین زیرفضا با این خاصیت بود باید داشته باشیم $Z = W$. بنابراین α یک پایه برای W است. فرض کنید $T^k(v) = a_۰ v + \cdots + a_{k-۱} T^{k-۱}(v)$. در این صورت نمایش T_W در پایه α به صورت زیر است.

$$[T_W]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & a_{k-۲} \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & a_{k-۱} \end{bmatrix}$$

قضیه. چند جمله‌ای مشخصه T_W برابر است با

$$p_{T_W}(x) = (-۱)^k (x^k - a_{k-۱} x^{k-۱} - \cdots - a_۰)$$

اثبات. باید $\det(T_W - xI)$ را محاسبه کنیم. نمایش این عملگر در پایه α به صورت زیر است.

$$[T_W - xI]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -x & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۰ \\ ۱ & -x & \cdots & ۰ & ۰ & a_۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & a_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -x & a_{k-۲} \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & a_{k-۱} - x \end{bmatrix}$$

اگر x برابر سطر آخر را با سطر بالایی جمع کنیم درایه روی قطر این سطر برابر صفر می‌شود و درایه‌های قبلی نیز تغییر نمی‌کند. حال اگر x برابر سطر یکی مانده به آخر را با سطر بالایی آن جمع کنیم همین اتفاق برای آن سطر بالایی خواهد افتاد. با ادامه این روند همه $(-x)$های روی قطر صفر می‌شوند و دیگر درایه‌های $(k-۱)$ ستون اول تغییری نمی‌کنند. اما با این روند ستون آخر تغییر می‌کند و در انتها درایه اول آن برابر

$$c = a_۰ + x(a_۱ + \cdots + x(a_{k-۱} - x)\cdots) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_{k-۱} x^{k-۱} - x^k$$

خواهد بود. با $(k-1)$ جابجایی متوالی ستون آخر را می‌توان به ستون اول تبدیل کرد در حالی که ترتیب دیگر ستون‌ها تغییری نکند با این کار دترمینان ماتریس $(-1)^{k-1}$ برابر می‌شود. اما ماتریس حاصل یک ماتریس پایین مثلثی است. بنابراین

$$\begin{aligned}\det(T_W - xI) &= \det\begin{bmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -x & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -x & a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1}-x \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{k=1}\det\begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{k-1}c\end{aligned}$$

با توجه به رابطه $T^k(v) = a_0 v + \cdots + a_{k-1}T^{k-1}(v)$، خواهیم داشت $p_{T_W}(T)(v) = 0$ و چون برای هر s، T^s با $p_{T_W}(T)$ جابجا می‌شود، داریم

$$p_{T_W}(T)(T^s(v)) = p_{T_W}(T).T^s(v) = T^s.p_{T_W}(T)(v) = T^s(p_{T_W}(T)(v)) = 0$$

بنابراین $p_{T_W}(T)$ روی کل W صفر است (زیرا روی مولد آن صفر می‌شود). به عبارت دیگر $(p_{T_W}(T))_W = p_{T_W}(T_W) = 0$. به این ترتیب چند جمله‌ای مشخصه T_W این عملگر را صفر می‌کند. این ویژگی برای همه عملگرها درست است.

قضیه (کیلی هامیلتون). فرض کنید T یک عملگر روی فضای با بعد متناهی V و $p_T(x)$ چند جمله‌ای مشخصه آن است. در این صورت $p_T(T) = 0$.

اثبات. نشان می‌دهیم برای هر $v \in V$، $p_T(T)(v) = 0$. اگر $v = 0$ باشد که حکم واضح است. در غیر این صورت فرض کنید W کوچک‌ترین زیرفضای T–ناوردا شامل v است. با توجه به اینکه $p_{T_W}(x)$ چند جمله‌ای $p_T(x)$ را می‌شمارد، چند جمله‌ای $q(x)$ای وجود دارد که $p_T(x) = q(x)p_{T_W}(x)$. بنابراین

$$p_T(T)(v) = q(T).p_{T_W}(T)(v) = q(T)(p_{T_W}(T)(v)) = q(T)(0) = 0$$

رابطه آخر با توجه به مباحث بالا در مورد صفر بودن $p_{T_W}(T)$ روی W صحیح است.

بدون استدلال بالا نیز می‌توانستیم نشان دهیم که چند جمله‌ای $q(x)$ وجود دارد که $q(T) = 0$. یک روش ساده برای این کار توجه به این موضوع است که عملگرهای $\{I, T, T^2, \ldots\}$ نمی‌توانند مستقل خطی باشند، زیرا بعد فضای عملگرهای خطی روی V متناهی و برابر $(\dim V)^2$ است. اما این استدلال تنها وجود یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از $(\dim V)^2$ را ثابت می‌کند. قضیه بالا نشان می‌دهد که یک چند جمله‌ای با درجه $\dim V$ هم می‌تواند T را صفر کند. البته قضیه بالا دقیقاً این چند جمله‌ای را نیز ارائه می‌دهد. اما آیا چند جمله‌ای کوچک‌تری نیز با این ویژگی وجود دارد؟ فرض کنید $\mathcal{A}_T$ مجموعه همه چند جمله‌ای‌هایی باشد که عملگر T را صفر می‌کنند.

$$\mathcal{A}_T = \{q \in F(x) : q(T) = 0\}$$

توجه کنید که

۱. اگر $q_1, q_2 \in \mathcal{A}_T$، آنگاه $(q_1 + q_2)(T) = q_1(T) + q_2(T) = 0$. بنابراین جمع هر دو عضو در $\mathcal{A}_T$ همچنان در این مجموعه قرار دارد.

۲. اگر $q \in \mathcal{A}_T$ و $a \in F(x)$، آنگاه $(aq)(T) = a(T)q(T) = 0$. بنابراین حاصل‌ضرب هر چند جمله‌ای در یک عضو $\mathcal{A}_T$ همچنان در $\mathcal{A}_T$ قرار دارد.

بنابراین چند جمله‌ای تکین یکتایی وجود دارد که $\mathcal{A}_T$ برابر مضارب آن است. این چند جمله‌ای کوچک‌ترین چند جمله‌ای با این ویژگی است که T را صفر می‌کند. معمولاً به این چند جمله‌ای، *چند جمله‌ای مینیمال عملگر* T می‌گوییم و آن را با m_T نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر یک چند جمله‌ای عملگر T را صفر کند آنگاه بر m_T بخش‌پذیر است. به خصوص $m_T \mid p_T$. توجه کنید که به صورت مشابه می‌توان چند جمله‌ای مینیمال را برای ماتریس‌های مربعی نیز تعریف کرد. به این ترتیب چند جمله‌ای مینیمال ماتریس نمایش یک عملگر برابر با چند جمله‌ای مینیمال خود آن عملگر است.

قضیه. هر ریشه چند جمله‌ای مشخصه ریشه چند جمله‌ای مینیمال نیز است و هر ریشه چند جمله‌ای مینیمال ریشه چند جمله‌ای مشخصه نیز است. به عبارت دیگر مجموعه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه و چند جمله‌ای مینیمال یکسان اند.

اثبات. هر ریشه چند جمله‌ای مینیمال عملگر T ریشه چند جمله‌ای مشخصه نیز است، زیرا $m_T \mid p_T$. برای اثبات قسمت دیگر قضیه فرض کنید λ یک ریشه چند جمله‌ای مشخصه باشد. بنابراین λ مقدار ویژه عملگر T است و اگر v بردار ویژه متناظر آن باشد داریم $T(v) = \lambda v$. طبق تعریف چند جمله‌ای مینیمال داریم $m_T(T) = ۰$. بنابراین

$$۰ = m_T(T)(v) = m_T(\lambda)(v)$$

از آنجا که v برداری ناصفر است رابطه بالا بیان می‌کند که $m_T(\lambda) = ۰$. به عبارت دیگر λ ریشه m_T نیز است.

قضیه. عوامل اول چند جمله‌ای مشخصه برابر عوامل اول چند جمله‌ای مینیمال اند.

اثبات. فرض کنید $p_۱(x),\dots,p_k(x)$ همه عوامل اول متمایز چند جمله‌ای مشخصه باشند. با توجه به اینکه چند جمله‌ای مینمال چند جمله‌ای مشخصه را می‌شمارد عوامل اول چند جمله‌ای مینمال نیز زیر مجموعه‌ای از $\{p_۱(x),\dots,p_k(x)\}$ اند. نشان می‌دهیم همه این عوامل باید در چند جمله‌ای مینمال وجود داشته باشند. این کار را با برهان خلف و برای ماتریس‌ها انجام می دهیم. فرض کنید ماتریس $A \in M_{n\times n}(F)$ و چند جمله‌ای اول $p(x) \in F(x)$ وجود داشته باشند که $p(x) \mid p_A(x)$ ولی $p(x) \nmid m_A(x)$. توسع $F \subseteq \tilde{F}$ وجود دارد که در آن چند جمله‌ای $p(x)$ ریشه‌ای مانند τ دارد. توجه کنید که τ نمی‌تواند ریشه چند جمله‌ای‌های اول دیگر در $F(x)$ باشد؛ زیرا این چند جمله‌ای‌ها نسبت به هم اول اند و در نتیجه در هیچ توسیعی عامل مشترک نخواهند داشت. در نتیجه τ ریشه $m_A(x)$ نیز نمی‌تواند باشد. اگر A را به عنوان ماتریسی با درایه‌های در $\tilde{F}$ در نظر بگیریم آنگاه چند جمله‌ای مشخصه آن همان $p_A(x) = \det(A - xI)$ است و در نتیجه τ ریشه‌ای از آن است. بنابر قضیه قبل τ ریشه چند جمله‌ای مینمال A به عنوان ماتریسی با درایه‌های در $\tilde{F}$ نیز است. توجه کنید که $m_A(x)$ یک چند جمله‌ای در $\tilde{F}$ است که برای آن درایم $m_A(A) = ۰$. بنابراین چند جمله‌ای مینیمال A در $\tilde{F}$ چند جمله‌ای $m_A(x)$ را می‌شمارد و درنتیجه τ باید ریشه $m_A(x)$ نیز باشد. این تناقض نشان می‌دهد که فرض $p(x) \nmid m_A(x)$ نمی‌تواند درست باشد.

این ویژگی ماتریس‌ها که می‌توان آن را روی میدان‌های مختلف در نظر گرفت ویژگی ساده‌ای است که در اثبات بالا از آن استفاده شد. در حالی که یک نگاشت خطی را نمی‌توان روی فضاهای خطی متفاوت و با میدان‌های متفاوت در نظر گرفت. البته متناظر این امکان برای ماتریس‌ها را می‌توان به صورتی برای نگاشت‌های خطی نیز بیان کرد که در اینجا به خاطر پیچیدگی ناکارآمد از آن صرف نظر می‌کنیم. در اثبات بالا بیان شد که چند جمله‌ای‌های مشخصه ماتریس A در میدان‌های F و $F \subseteq \tilde{F}$ برابر اند و چند جمله‌ای مینمال آن در $\tilde{F}$ چند جمله‌ای مینیمال آن را در F می‌شمارد. در حقیقت این دو چند جمله‌ای مینیمال نیز با هم برابرند (رجوع کنید به تمرین؟؟؟)

قضیه. اگر T قطری شدنی باشد آنگاه چند جمله‌ای مینیمال آن به عوامل درجه یک متمایز شکافته می‌شود.

اثبات. می‌دانیم که چند جمله‌ای مشخصه عملگر قطری به صورت

$$p_T(x) = (\lambda_۱ - x)^{a_۱} \cdots (\lambda_k - x)^{a_k}$$

است که $\lambda_۱,\dots,\lambda_k$ها مقادیر ویژه متمایز اند. بنابراین چند جمله‌ای مینمال به شکل

$$m_T(x) = (x - \lambda_۱)^{b_۱} \cdots (x - \lambda_k)^{b_k}$$

است که در آن $1 \leq b_i \leq a_i$. برای اینکه نشان دهیم در چند جمله‌ای مینیمال همه توان‌های b_i برابر یک اند کافی است نشان دهیم که چند جمله‌ای $q(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$ عملگر T را صفر می‌کند. چون T قطری می‌شود V برابر مجموع فضاهای ویژه است. بنابراین کافی است نشان دهیم $q(T)$ روی فضاهای ویژه صفر است. اما اگر v بردار ویژه T متناظر مقدار ویژه λ_i باشد آنگاه $q(T)(v) = q(\lambda_i)v = 0$. بنابراین $q(T)$ باید همه جا صفر شود.

اگر قرار دهیم

$$q_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)}$$

آنگاه $q_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. بنابراین با شرایط قضیه بالا $q_i(T)$ روی همه فضاهای ویژه صفر می‌شود بجز فضای ویژه متناظر مقدار ویژه λ_i که روی آن همانی است. در نتیجه این عملگر تصویر روی این زیر فضا در تجزیه V به فضاهای ویژه است. در زیر نشان می دهیم که اگر چند جمله‌ای مینیمال عملگر T به عوامل درجه یک متمایز شکافته شود آنگاه عملگرهای $q_i(T)$ تصویر روی فضاهای ویژه این عملگر اند و V برابر جمع مستقیم فضاهای ویژه T است. به عبارت دیگر تحت این شرایط T قطری شدنی است.

قضیه. **T قطری شدنی است اگر و تنها اگر چند جمله‌ای مینیمال آن به عوامل درجه یک متمایز شکافته شود.**

اثبات. در قضیه قبل دیدیم اگر T قطری شدنی باشد آنگاه چند جمله‌ای مینیمال آن به عوامل درجه یک متمایز شکافته می‌شود. حال فرض کنید چند جمله‌ای مینیمال T به شکل زیر است

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$$

که در آن $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ متمایز اند. دقت کنید که λ_iها مقادیر ویژه عملگر T اند. قرار می‌دهیم

$$q_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)}$$

نشان می‌دهیم که $\operatorname{Im} q_i(T) \subseteq V_{\lambda_i}$ و مجموع مستقیم این فضاها برابر V است.

گام اول. توجه کنید که فضای ویژه مقدار ویژه λ_i همان هسته عملگر $T-\lambda_i I$ است. باید ببینیم که آیا رابطه $(T-\lambda_i I)(\operatorname{Im} q_i(T)) = \{0\}$ برقرار است. با توجه به تعریف $q_i(x)$ به راحتی دیده می‌شود که $m_T(x) \mid (x-\lambda_i)q_i(x)$. بنابراین $(T-\lambda_i I)q_i(T) = 0$. به این ترتیب خواهیم داشت

$$(T-\lambda_i I)(\operatorname{Im} q_i(T)) = (T-\lambda_i I).q_i(T)(V) = \{0\}$$

گام دوم. قرار می‌دهیم $T_i = q_i(T)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\operatorname{Im} T_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} T_k = V$ و T_iها تصویر روی مولفه iام در این تجزیه است. برای اینکار باید دو رابطه زیر را نشان دهیم.

۱. $T_1 + \cdots + T_k = I$.

۲. برای هر $i \neq j$، $T_iT_j = 0$.

با توجه به تعریف چند جمله‌ای‌های $q_i(x)$ داریم

$$\begin{aligned} &\deg(q_1(x)+\cdots+q_k(x)) \leq k-1,\\ &q_1(\lambda_i)+\cdots+q_k(\lambda_i) = 1 \qquad (1\leq i\leq k)\\ &m_T(x) \mid q_i(x)q_j(x) \qquad (i\neq j)\end{aligned}$$

چون $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ متمایز اند دو رابطه اول نتیجه می‌دهند که $q_1(x)+\cdots+q_k(x) = 1$. بنابراین

$$T_1 + \cdots + T_k = (q_1 + \cdots + q_k)(T) = I$$

به کمک رابطه سوم هم داریم

$$T_iT_j = q_i(T).q_j(T) = (q_iq_j)(T) = 0$$

به این ترتیب مجموع مستقیم $\operatorname{Im} q_i(T)$ ها برابر V می‌شود. از آنجا که $\operatorname{Im} q_i(T)$ ها در فضاهای ویژه عملگر T قرار دارند مجموع فضاهای ویژه نیز باید برابر V باشد. این نیز نتیجه می‌دهد که T قطری شدنی است.
در گام دوم اثبات بالا تنها از دو ویژگی زیر برای چند جمله‌ای‌های $q_1,\dots,q_k$ استفاده شد.

$$q_1(x) + \cdots + q_k(x) = 1, \quad m_T(x) \mid q_i(x)q_j(x)$$

اگر برای یک عملگر دلخواه T چنین چند جمله‌ای‌هایی پیدا شوند آنگاه $\operatorname{Im} q_1(T) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} q_k(T) = V$ و $q_i(T)$ تصویر روی مولفه iام در این تجزیه خواهند بود. اما زیرفضاهای $\operatorname{Im} q_i(T)$ توسط T ناوردا هستند. به این ترتیب یک تجزیه V به زیر فضاهای ناوردا توسط T بدست می‌آید. در زیر یک روش ساختن چنین چند جمله‌ای‌هایی برای عملگر دلخواه T ارائه می‌شود.

قضیه. فرض کنید $m_T(x) = p_1(x)^{b_1} \cdots p_k(x)^{b_k}$ تجزیه چند جمله‌ای مینیمال عملگر خطی $T : V \to V$ به عوامل اول باشد که در آن $p_1,\dots,p_k$ متمایز اند. در این صورت V برابر جمع مستقیم زیر فضاهای T-ناوردای $W_1,\dots,W_k$ است که برای آنها داریم $m_{T_{W_i}}(x) = p_i(x)^{b_i}$.

با توجه به این قضیه برای مطالعه بسیاری از ویژگی‌های عملگرهای خطی می‌توانیم فرض کنیم چند جمله‌ای مینیمال (و یا چند جمله‌ای مشخصه) آن توانی از یک عامل اول باشد.
اثبات. قرار دهید

$$Q_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j(x)^{b_j}$$

چند جمله‌ای‌های $Q_1,\dots,Q_k$ نسبت به هم اول اند زیرا هیچ عامل اولی وجود ندارد که همه آنها را بشمارد. بنابراین چند جمله‌ای‌های $r_i(x)$ وجود دارند که

$$r_1(x)Q_1(x) + \cdots + r_k(x)Q_k(x) = 1$$

چند جمله‌ای‌های $q_i(x) = r_i(x).Q_i(x)$ دارای ویژگی‌های مورد نظر اند. زیرا

$$q_1(x) + \cdots + q_k(x) = 1$$
$$m_T(x) \mid Q_i(x)Q_j(x) \mid q_i(x)q_j(x) \qquad (i \neq j)$$

طبق مطالب بیان شده در بالا V برابر جمع مستقیم زیرفضاهای $W_i = \operatorname{Im} q_i(T)$ است و این فضاها نیز T ناوردا اند. نشان می‌دهیم $m_{T_{W_i}}(x) = p_i(x)^{b_i}$.

گام اول. نشان می‌دهیم برای هر i چند جمله‌ای $p_i(x)^{b_i}$ عملگر T_{W_i} را صفر می‌کند. توجه کنید که $W_i = q_i(T)(V)$ و $m_T(x) \mid p_i(x)^{b_i} q_i(x)$. بنابراین

$$p_i(T)^{b_i}(W_i) = p_i(T)^{b_i}.q_i(T)(V) = \{0\}$$

از طرفی تحدید عملگر $p_i(T)^{b_i}$ به W_i همان $p_i(T_{W_i})^{b_i}$ است. بنابراین $p_i(T_{W_i})^{b_i} = 0$. این نشان می‌دهد چند جمله‌ای مینیمال T_{W_i} چند جمله‌ای $p_i(x)^{b_i}$ را می‌شمارد.

گام دوم. توجه کنید که $p_i(x)$ چند جمله‌ای $q_i(x)$ را نمی‌شمارد؛ زیرا این چند جمله‌ای بقیه $q_j(x)$ها را می‌شمارد و اگر $q_i(x)$ را هم بخواهد بشمارد آنگاه مجموع q_iها یعنی چند جمله‌ای ۱ را باید بشمارد ولی این با اول بودن p_i سازگار نیست. بنابراین $m_T(x) \nmid p_i(x)^{b_i-1}q_i(x)$؛ یعنی $p_i(T)^{b_i-1}q_i(T) \neq 0$. در نتیجه بردار $v \in V$ یافت می‌شود که

$$p_i(T)^{b_i-1}(q_i(T)(v)) = p_i(T)^{b_i-1}q_i(T)(v) \neq 0$$

چون $q_i(T)(v)$ در $W_i = \operatorname{Im} q_i(T)$ است بنابراین تحدید $p_i(T)^{b_i-1}$ به W_i صفر نیست و به عبارت دیگر $p_i(T_{W_i})^{b_i-1} \neq 0$. با توجه به نتیجه گام قبل این نتیجه می‌دهد که چند جمله‌ای مینیمال T_{W_i} برابر است با $p_i(x)^{b_i}$.

نتیجه. اگر چند جمله‌ای مینیمال عملگر T شکافته شود آنگاه زیر فضاهای T-ناوردای $W_1,\ldots,W_k$ وجود دارند که چند جمله‌ای مینیمال T_{W_i} توانی از $(x-\lambda_i)$ است.

با توجه به اینکه عوامل اول چند جمله‌ای مینیمال و چند جمله‌ای مشخصه یکسان اند در گزاره بالا می‌توان شرط شکافته شدن چند جمله‌ای مینیمال را با شرط شکافته شدن چند جمله‌ای مشخصه عملگر T عوض کرد.

با شرایط گزاره بالا $S_i = T_{W_i} - \lambda_i I_{W_i}$ عملگری روی زیرفضای W_i است که برای آن داریم $S_i^{b_i} = 0$. بنابراین S_i پوچ‌توان است و پایه β_i برای W_i وجود دارد که نمایش ماتریسی S_i در آن پایه به صورت ساده زیر است.

$$[S_i]_{\beta_i}^{\beta_i} = \begin{bmatrix} J_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{l_i}^i \end{bmatrix} \qquad J_j^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب نمایش T_{W_i} در این پایه به صورت زیر است.

$$[T_{W_i}]_{\beta_i}^{\beta_i} = [S_i]_{\beta_i}^{\beta_i} + \lambda_i I = \begin{bmatrix} J_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{l_i}^i \end{bmatrix} \quad J_j^i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

از آنجا که V برابر جمع مستقیم W_iها است $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k)$ پایه‌ای برای V خواهد بود که نمایش عملگر T در آن به صورت زیر است.

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} [T_{W_1}]_{\beta_1}^{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_{W_2}]_{\beta_2}^{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_{W_k}]_{\beta_k}^{\beta_k} \end{bmatrix} \quad [T_{W_i}]_{\beta_i}^{\beta_i} = \begin{bmatrix} J_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{l_i}^i \end{bmatrix} \quad J_j^i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

به بیان دیگر V برابرجمع مستقیم زیر فضاهای T-ناوردایی است که تحدید T به آنها دارای نمایشی است که در آن درایه‌های روی قطر آن همگی برابر یکی از مقادیر ویژه T و درایه‌های ردیف بالای قطر آن همگی برابر یک اند و بقیه درایه‌های آن هم برابر صفر است. به چنین ماتریسی *ماتریس ژُردان* و این نمایش عملگر T را *فرم ژردان* آن می‌گویند. توجه کنید که ماتریس ژردان یک ماتریس بالا مثلثی است و چند جمله‌ای مشخصه هر ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی شکافته می‌شود. بنابراین

قضیه. گزاره‌های زیر معادل اند.

۱. چند جمله‌ای مشخصه عملگر T شکافته می‌شود.

۲. چند جمله‌ای مینیمال عملگر T شکافته می‌شود.

۳. پایه‌ای وجود دارد که نمایش ماتریسی عملگر T در آن بالا مثلثی است.

---

۴. پایه‌ای وجود دارد که نمایش ماتریسی عملگر T در آن پایین مثلثی است.

۵. T دارای فرم ژردان است. (یعنی پایه‌ای وجود دارد که نمایش T در آن یک ماتریس ژردان است.)